

הנדסה אנליטית מתקדמת

מכללת שאנן תשפ"ה

ד"ר נלי קלר

קו ישר במישור

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$m_1 = -\frac{A_1}{B_1}$

$m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$

אם הישרים מקבילים אז השיפועים שווים

$m_1 = m_2$

משוואת ישר	כפונקציה:	$y = mx + n$	✗
	פרמטרית:	$Ax + By + C = 0$	✗
	מציאת המשוואה (מתוך נקודה ושיפוע):	$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$	✓
שיפועים קשורים	מקבילים - אותו שיפוע:	$m_1 = m_2$	✗
	מאונכים - שיפוע הופכי ונגדי:	$m_1 \cdot m_2 = -1$	✓
נקודות מיוחדות	אמצע קטע:	$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$	☑
	חלוקת קטע ביחס נתון:	$x_P = \frac{lx_1 + kx_2}{l + k}, y_P = \frac{ly_1 + ky_2}{k + l}$	✓
	מרכז כובד (מפגש תיכונים במשולש):	$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$	✗
מרחקים	מרחק בין נקודות - אורך קטע:		✗ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
			☑ $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
	מרחק נקודה מישר:		✓ $d = \frac{ Ax_1 + By_1 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ או $d = \frac{ -mx_1 + y_1 - n }{\sqrt{m^2 + 1^2}}$
	מרחק בין ישרים מקבילים:		✗ $d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ או $d = \frac{ n_1 - n_2 }{\sqrt{1 + m^2}}$

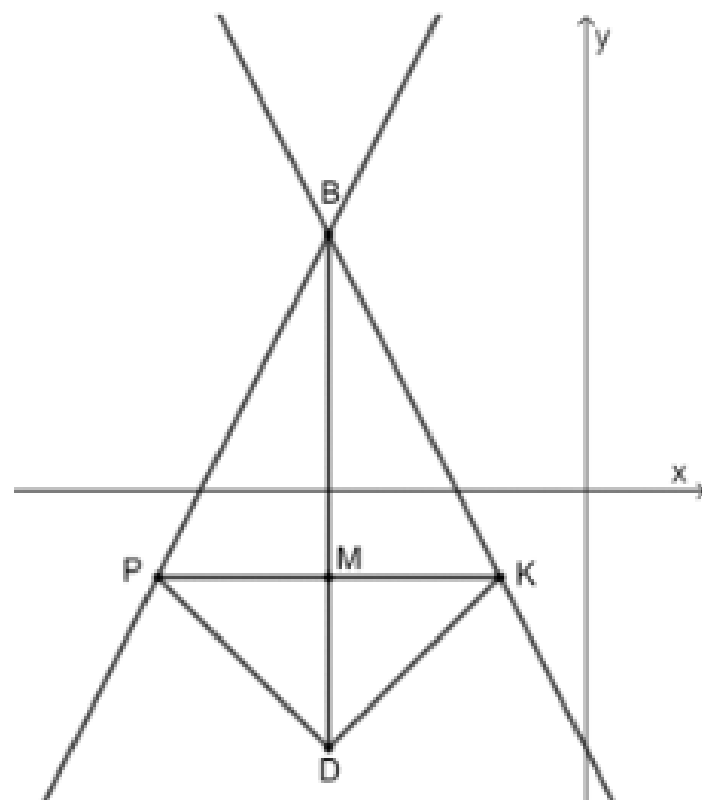
אם הישרים מקבילים אז מתקיים

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

אם הישרים מתלכדים אז מתקיים

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

תרגיל 1



אלכסוני הדלתון PBKD נפגשים בנקודה $M(-6, -2)$.

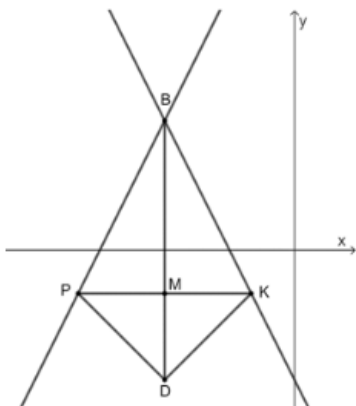
הצלע PB מונחת על הישר $y = 2x + 18$, והצלע BK מונחת על הישר $y = -2x - 6$.

- מצאו את שיעורי הנקודה B.
- הסבירו מדוע האלכסון BD מקביל לציר ה-y.
- הסבירו מדוע האלכסון PK מקביל לציר ה-x.

נתון: $BM = PK$, $BM = 2MD$.

- מצאו את שיעורי הנקודות P, D ו-K.
- מצאו את משוואת הצלע PD.
- האם $PD \parallel BK$? נמקו.
- חשבו את שטח הדלתון PBKD.
- חשבו את אורך הצלע PB.
- חשבו את היקף הדלתון PBKD.

תרגיל 1 פתרון



אלכסוני הדלתון PBKD נפגשים בנקודה M(-6, -2). (PB=BK, PD=DK)

הצלע PB מונחת על הישר $y = 2x + 18$, והצלע BK מונחת על הישר $y = -2x - 6$.

- מצאו את שיעורי הנקודה B.
- הסבירו מדוע האלכסון BD מקביל לציר ה-y.
- הסבירו מדוע האלכסון PK מקביל לציר ה-x.

נתון: $BM=PK$, $BM = 2MD$.

- מצאו את שיעורי הנקודות D, K ו-P.
- מצאו את משוואת הצלע PD.
- האם $PD \parallel BK$? נמקו.
- חשבו את שטח הדלתון PBKD.
- חשבו את אורך הצלע PB.
- חשבו את היקף הדלתון PBKD.

$$\begin{aligned} y_P &= y_K = y_M = -2 \\ P \in PB \\ \downarrow \\ y &= -2 = 2x + 18 \\ -20 &= 2x \\ x &= -10 \\ P &(-10, -2) \\ K \in BK \\ \downarrow \\ -2 &= -2x - 6 \\ y &= -2x \\ x &= -2 \\ K &(-2, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BD \parallel OY \quad \therefore \begin{cases} M(-6, -2) \\ B(-6, 6) \end{cases} \\ \downarrow \\ BM \parallel OY \Rightarrow BD \parallel OY \\ PK \parallel OX \quad \therefore \begin{cases} PB=BK \\ PD=DK \end{cases} \\ \text{אלכסון } BD \perp PK \Leftrightarrow \text{הצלע } PK \parallel OX \\ \begin{cases} BD \parallel OY \\ OX \perp OY \end{cases} \\ \begin{cases} DB \perp OX \\ DB \perp PK \end{cases} \end{aligned}$$

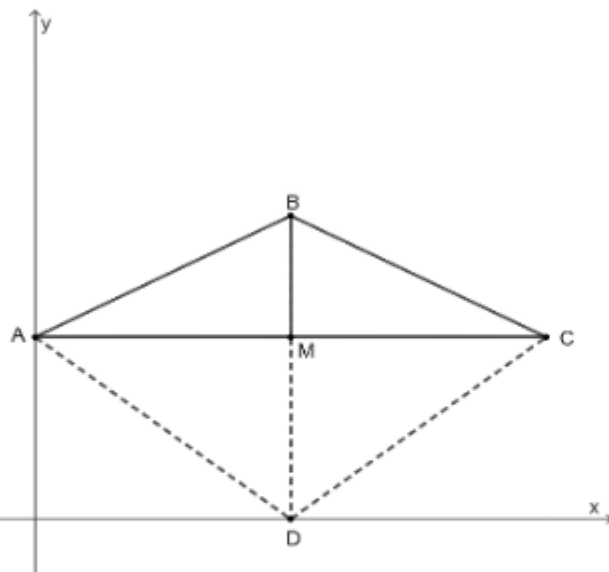
$$\begin{aligned} B(x_B, y_B) \quad \therefore \begin{cases} B = PB \cap BK \\ \downarrow \\ B: \begin{cases} y = 2x + 18 \\ y = -2x - 6 \end{cases} \\ 2x + 18 = -2x - 6 \\ 4x = -24 \\ x = -6 \\ y = 2 \cdot (-6) + 18 = 6 \\ B(-6, 6) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PB &= \sqrt{(-10 - (-6))^2 + (-2 - 6)^2} \\ &= \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \\ PD &= \sqrt{(-10 - (-6))^2 + (-2 - (-6))^2} \\ &= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ P_{PBKD} &= 8\sqrt{5} + 8\sqrt{2} = 8(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-10, -2) \quad D(-6, -6) \\ m = \frac{-6 - (-2)}{-6 - (-10)} = \frac{-4}{4} = -1 \\ m_{PD} = -1 \\ y - (-6) = -1(x - (-6)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PD \nparallel BK \Leftrightarrow \begin{cases} m_{PD} = -1 \\ m_{BK} = -2 \end{cases} \quad \textcircled{1} \\ S = \frac{1}{2} BD \cdot PK \quad \textcircled{2} \\ BD = y_B - y_D = 6 - (-6) = 12 \\ PK = x_K - x_P = -2 - (-10) = 8 \\ S_{PBKD} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K, P, D \quad \therefore \begin{cases} BM = 2MD \\ \downarrow \\ BM:MD = 2:1 \\ \downarrow \\ y_M = \frac{y_B \cdot 1 + y_D \cdot 2}{3} \\ -2 = \frac{6 \cdot 1 + y_D \cdot 2}{3} \\ -6 = 6 + 2y_D \\ y_D = -6 \\ DB \parallel OY \Rightarrow x_D = x_B = -6 \\ \downarrow \\ D(-6, -6) \end{cases} \end{aligned}$$



במשולש ABC הצלע AB מונחת על הישר $y = 0.5x + 3$,
והצלע BC מונחת על הישר $y = -0.5x + 7$.
הצלע AC מקבילה לציר ה-x.

א. מצאו את שיעורי נקודות A ו-B.

מנקודה B הורידו גובה לצלע AC. נתון: $AM = MC$.

- ב. 1. מצאו את שיעורי הנקודה M.
2. חשבו את אורך הקטע AM.
3. מצאו את שיעורי הנקודה C.
4. הוכיחו כי משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

המשך BM חותך את ציר ה-x בנקודה D.

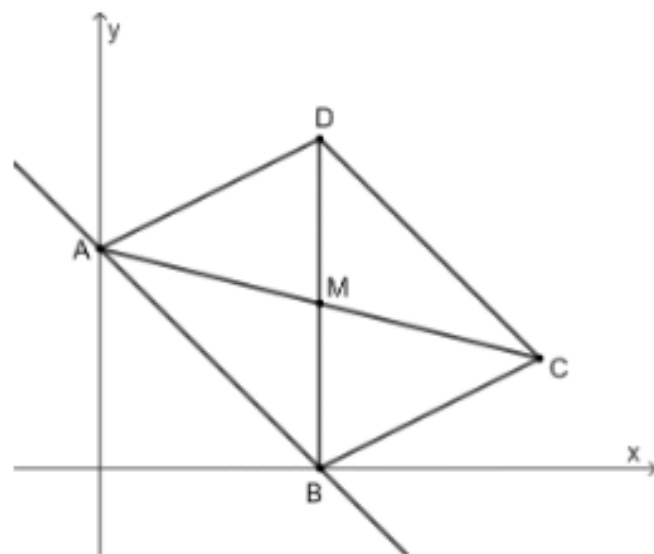
ג. הוכיחו כי מרובע ABCD הוא דלתון.

- ד. 1. חשבו את אורך הקטע MD.
2. חשבו את אורך הקטע AD.

המשך הישר BC חותך את ציר ה-y בנקודה E.

- ה. 1. מצאו את שיעורי הנקודה E.
2. שרטטו את הגובה מנקודה B לצלע AE.
3. הוכיחו כי משולש ABE הוא משולש שווה שוקיים.

תרגיל 3

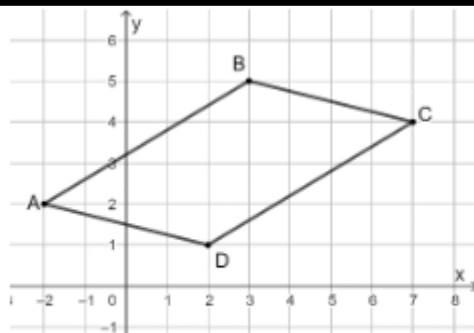


ישר AB חותך את ציר ה- y בנקודה A
במקבילית ABCD הצלע AB מונחת על הישר $y + x = 4$. אלכסוני
המקבילית נפגשים בנקודה M. האלכסון BD מקביל לציר ה- y .
(נתון: $M(4,3)$).

- מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.
- חשבו את אורך הקטע BM.
- מצאו את שיעורי הנקודה D.
1. מצאו את שיפוע הישר AD.
2. מצאו את משוואת הישר BC.
- ה. מצאו את משוואת הישר DC.
- ו. מצאו את שיעורי הנקודה C.

תרגיל 4

ש"ב



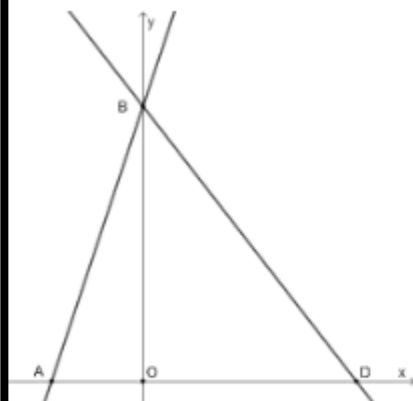
לפניכם מרובע ABCD.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. מצאו את שיפועי הישרים AB, BC, CD ו-AD.

ג. הוכיחו כי מרובע ABCD הוא מקבילית.

תרגיל 5



3. הישר AB שמשוואתו $y=3x+9$ חותך את הצירים בנקודות A ו-B. הישר BD שמשוואתו $9x+7y=63$ חותך את הצירים בנקודות B ו-D. הנקודה O ראשית הצירים.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-D.

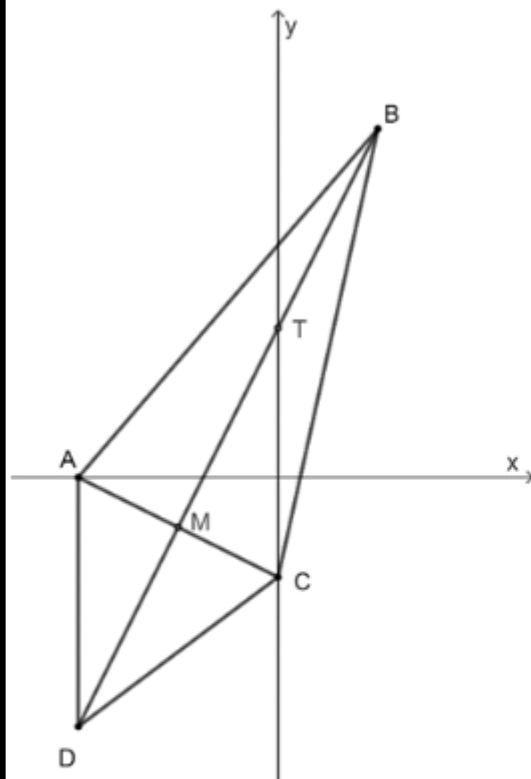
נתון כי מרובע ABCD הוא מקבילית.

- ב. 1. חשבו את אורך הקטע AD.
2. סמנו את נקודה C בסרטוט ומצאו את שיעוריה.

- ג. 1. חשבו את אורך הקטע AB.
2. חשבו את היקף המקבילית.
3. חשבו את שטח המקבילית.

מנקודה C העבירו ישר המקביל לציר ה-y וחותך את ציר ה-x בנקודה E.
ד. הוכיחו: $\triangle AOB \cong \triangle DEC$.

תרגיל 6



אלכסוני המרובע ABCD מאונכים ונפגשים בנקודה M.
האלכסון AC מונח על הישר $2y+x=-4$ וחותר את הצירים
בנקודות A ו-C.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-C.

שיעור ה-y של נקודה C גדול פי 2 משיעור ה-y של נקודה M.

ב. 1. מצאו את שיעורי ה-y של נקודה M.

2. מצאו את שיעורי ה-x של נקודה M.

נתון: $AM=MC$.

ג. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא דלתון.

הצלע AD מקבילה לציר ה-y, נתון: $DC=5$.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה D.

האלכסון BD חותר את ציר ה-y בנקודה T, נתון: $AM = \sqrt{5}$.

ה. 1. מצאו את משוואת האלכסון BD.

2. מצאו את שיעורי הנקודה T.

3. הוכיחו כי המרובע ATCD הוא מקבילית.

4. מצאו את אורך הקטע MT.

הנקודה T היא אמצע הקטע MB.

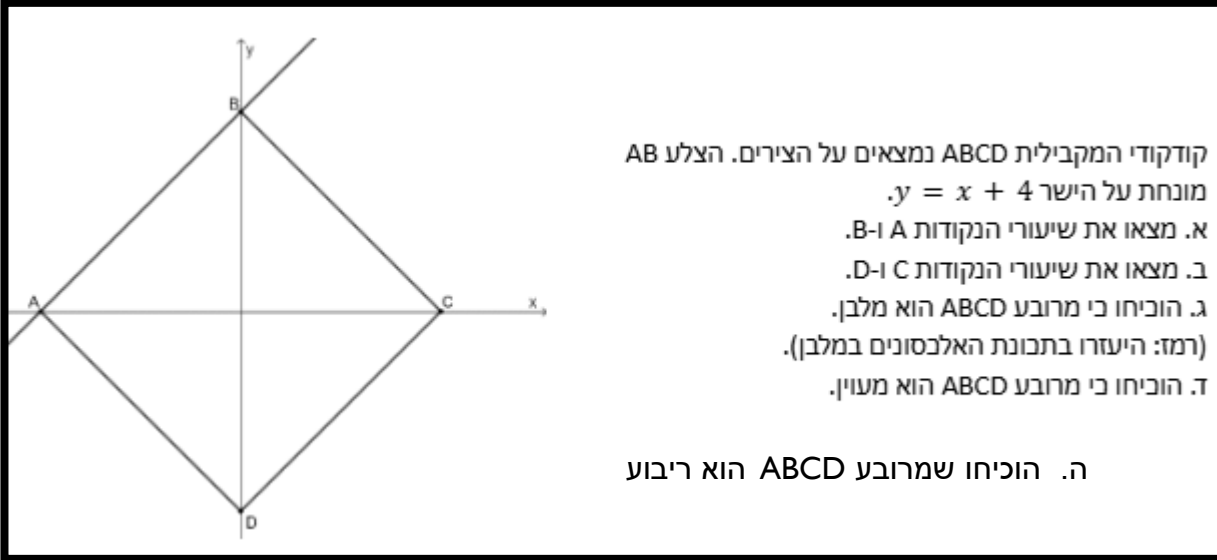
ו. 1. חשבו את שטח המשולש TMC.

2. הסבירו מדוע שטח משולש TMC שווה לשטח משולש TBC.

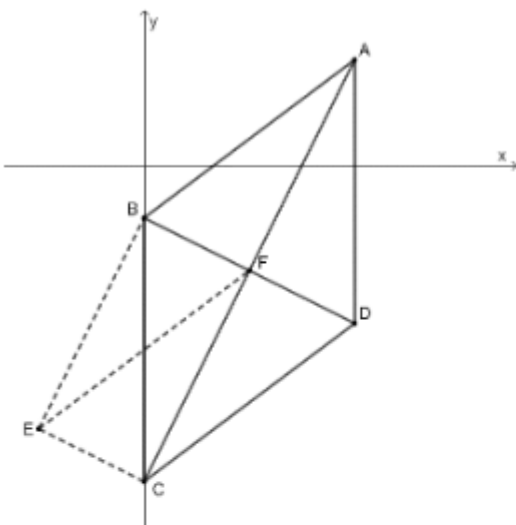
3. מצאו את שיעור ה-x של נקודה B.

4. מצאו את שיעור ה-y של נקודה B.

תרגיל 7



תרגיל 8



3. במרובע ABCD הצלע BC מונחת על ציר ה-y, ואלכסוניו נחתכים בנקודה F. הקטעים AB ו-AC מונחים על הישרים $y = 0.75x - 1$ ו- $y = 2x - 6$ בהתאמה.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C.

נתון: D(4, -3).

ב. 1. הוכיחו: $AB \parallel CD$.

2. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא מקבילית.

נתון: $AC = \sqrt{80}$, $BD = \sqrt{20}$.

ג. 1. חשבו את אורכי הקטעים BF ו-FC (השאירו שורש בתשובתיכם).

2. השתמשו במשפט פיתגורס במשולש BFC כדי להראות כי הוא משולש ישר זווית.

3. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא מעוין.

נתון כי מרובע ABEF הוא מקבילית.

ד. 1. הוכיחו כי מרובע BFCE הוא מקבילית.

2. הוכיחו כי מרובע BFCE הוא מלבן.

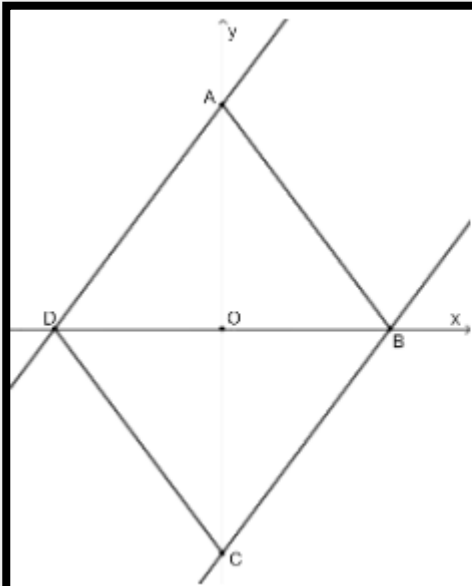
3. חשבו ב-2 דרכים שונות את אורך האלכסון EF.

אלכסוני המרובע BFCE נפגשים בנקודה M.

ה. 1. הוכיחו: $S_{\triangle BFM} = S_{\triangle CFM}$.

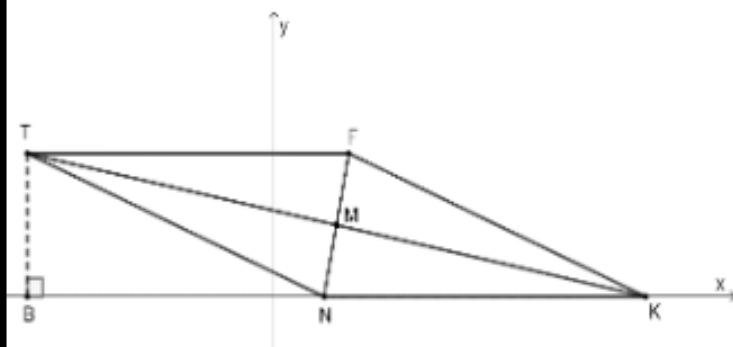
(*) 2. הוכיחו: $S_{BFCE} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$.

תרגיל 9



1. קודקודי המרובע ABCD נמצאים על הצירים. הצלעות AD ו-BC מונחות על הישרים $y = 1\frac{1}{3}x + 4$ ו- $y = 1\frac{1}{3}x - 4$ בהתאמה.
 O היא ראשית הצירים.
 א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C ו- D.
 ב. הוכיחו: $\triangle AOD \cong \triangle COB$.
 ג. הסבירו מדוע $AD \parallel BC$.
 ד. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא מקבילית.
 ה. הסבירו מדוע אלכסוני המרובע ABCD מאונכים.
 ו. הוכיחו כי מרובע ABCD הוא מעוין.
 ז. חשבו את היקף ושטח המעוין.

תרגיל 10



מעוין TFKN מונח על ציר ה-x ואלכסוניו נפגשים

בנקודה M (ראו סרטוט). נתון: $P_{TFKN} = 52$,

$M(2.5, 2.5)$, $N(2, 0)$.

א. חשבו את אורך הצלע NK.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה K.

ג. מצאו את משוואת הישר TK.

מנקודה T הורידו אנך TB לציר ה-x, כך ש $TB=5$.

ד. חשבו את שטח המעוין TFKN.

ה. 1. מצאו את שיעורי ה-y של נקודה T.

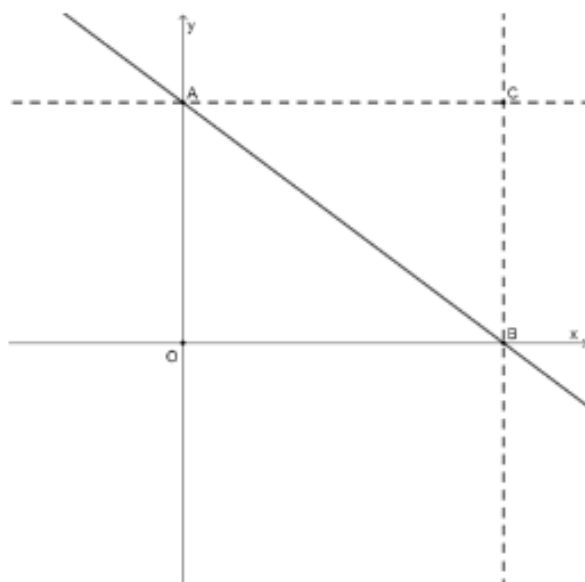
2. מצאו את שיעורי ה-x של נקודה T.

ו. חשבו את שטח משולש TBN.

ז. 1. הסבירו מדוע הצלע TF מקבילה לציר ה-x.

(*) 2. הוכיחו: $4TNB = 2 \cdot 4FTM$.

תרגיל 11



הישר $3x + 4y = 24$ חותך את הצירים בנקודות A ו-B, הנקודה O הינה ראשית הצירים (ראו סרטוט).

- א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.
- ב. 1. מצאו את אורכי הקטעים AO ו-BO.
2. מצאו את אורך הקטע AB.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה-x ודרך הנקודה B העבירו ישר מקביל לציר ה-y. הישרים הנ"ל נפגשים בנקודה C (ראו סרטוט).

ג. הוכיחו כי מרובע AOBC הוא מלבן.

הנקודה M היא אמצע הקטע AB.

ד. סמנו את הנקודה M בסרטוט ומצאו את אורך הקטע OM.

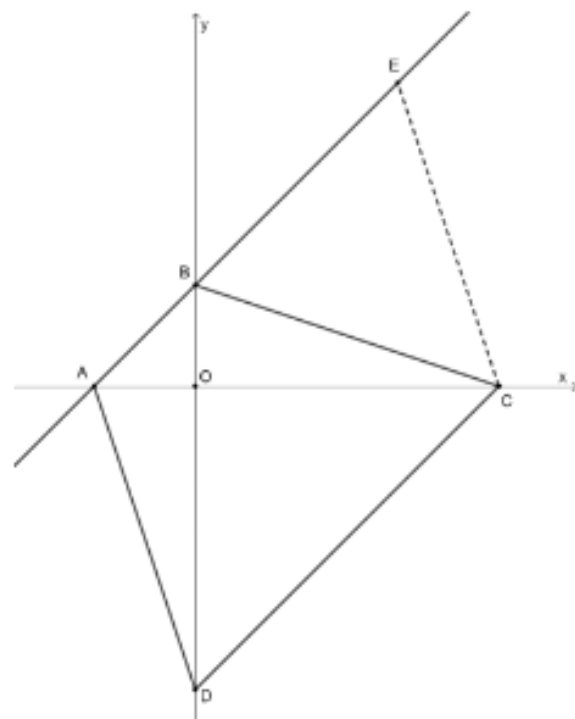
הנקודה D נמצאת על ציר ה-y כך ש: $\triangle AOB \cong \triangle DOB$.

ה. סמנו את הנקודה D בסרטוט מצאו את שיעוריה.

דרך הנקודה D העבירו ישר המקביל לישר AB וחותך את ציר ה-x בנקודה T.

ו. סמנו את נקודה T בסרטוט והוכיחו כי $\triangle ACB \cong \triangle TOD$.

- ז. 1. הוכיחו כי מרובע ABTD הוא מעוין.
2. מצאו את שטח והיקף המקובע ABTD.



קודקודי הטרפז ABCD ($AB \parallel CD$) נמצאים על הצירים. הבסיס AB מונח על הישר $y = x + 2$, O היא ראשית הצירים (ראו סרטוט).

א. הוכיחו: $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

נתון: $S_{\triangle COD} = 9 \cdot S_{\triangle AOB}$.

- ב. 1. מצאו את יחס השטחים בין משולש AOB למשולש COD.
 2. מצאו את יחס הדמיון בין משולש AOB למשולש COD.
 3. מצאו את אורכי הקטעים AO ו-OB.
 4. מצאו את אורכי הקטעים OD ו-OC.

ג. הוכיחו: $\triangle AOD \cong \triangle BOC$.

ד. הסבירו מדוע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

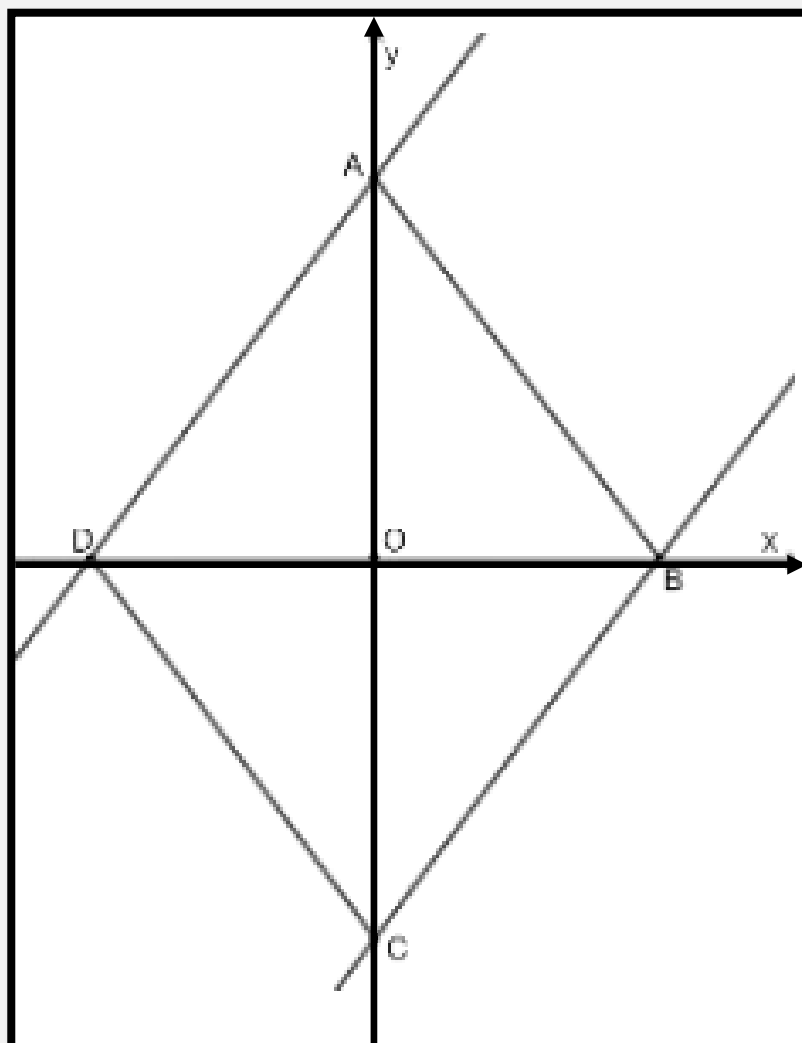
הנקודה T היא נקודת המפגש של המשיך השוקיים DA ו-CB.

- ה. 1. מצאו את משוואות הישרים DA ו-CB.
 2. מצאו את שיעורי הנקודה T.
 3. הסבירו מדוע המשולש TDC הוא משולש שווה שוקיים (אין צורך לעשות חישובים נוספים).

דרך נקודה C העבירו ישר המקביל לשוק AD וחותך את המשיך הישר AB בנקודה E (ראו סרטוט). אלכסוני המרובע AECD נפגשים בנקודה M.

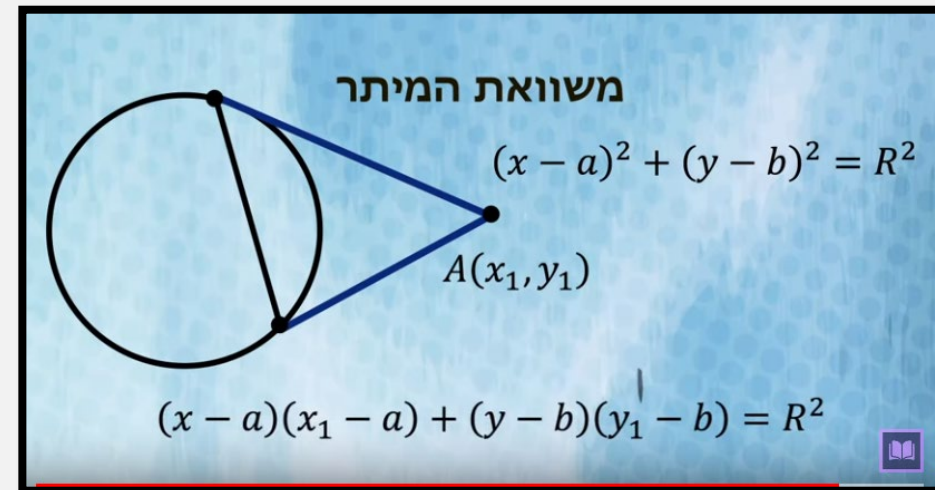
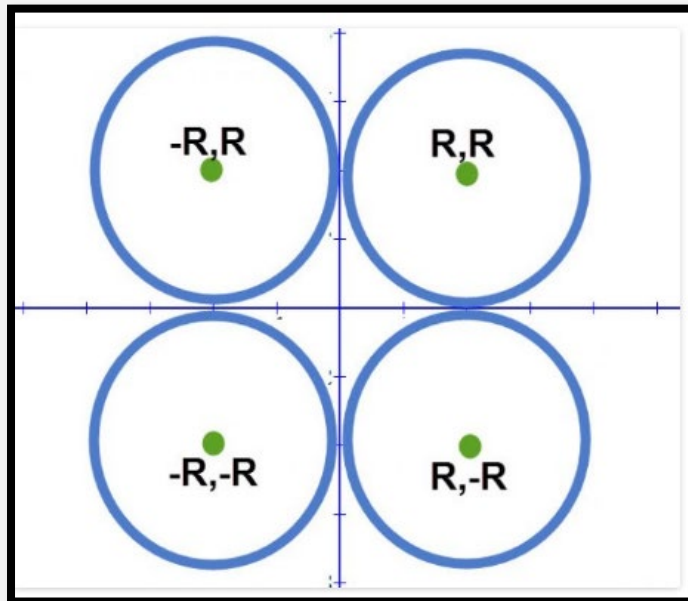
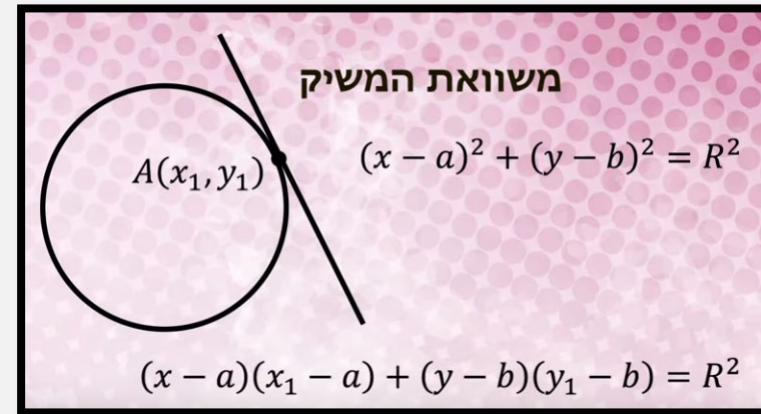
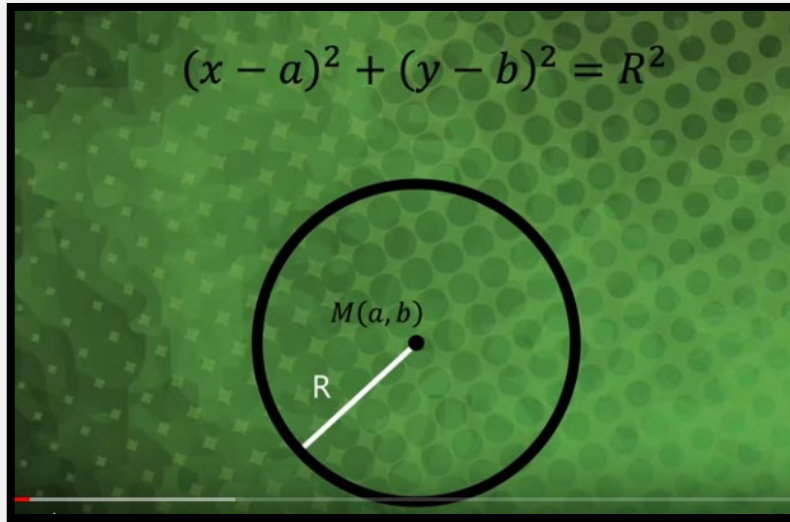
- ו. מהו סוג המרובע AECD? נמקו.
 ז. 1. הסבירו מדוע נקודה M נמצאת על ציר ה-x.
 2. מצאו את שיעורי הנקודה M.
 3. הסבירו מדוע משולש AMD הוא שווה שוקיים.

בחן מס' 1



1. קודקודי המרובע ABCD נמצאים על הצירים. הצלעות AD ו-BC מונחות על הישרים $y = \frac{1}{3}x + 4$ ו- $y = \frac{1}{3}x - 4$ בהתאמה.
O היא ראשית הצירים.
א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.
ב. הוכיחו: $\triangle AOD \cong \triangle COB$.
ג. הסבירו מדוע $AD \parallel BC$.
ד. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא מקבילית.
ה. הסבירו מדוע אלכסוני המרובע ABCD מאונכים.
ו. הוכיחו כי מרובע ABCD הוא מעוין.
ז. חשבו את היקף ושטח המעוין.

המעגל



המעגל

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

10. משוואות אלכסוניו של המלבן

$$x - 4 = 0, 3x - 4y = 0$$

אורכי הצלעות הם $\sqrt{20}$ ו $\sqrt{80}$

א. מצאו את משוואת המעגל החוסם את המלבן

ב. מצא את קודקודי המלבן

מצאו מרכז ורדיוס של כל אחד ממעגלים

הבאים

$$1. x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$$

$$2. x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

$$3. x^2 + y^2 - 10x + 5y - 11 = 0$$

$$4. 3x^2 + 3y^2 - 36x + 6y + 21 = 0$$

מצאו את משוואת המעגל

5. שמרכזו בנקודה $(-2, -1)$ והוא עובר בנקודה $(-3, 6)$

6. העובר דרך הנקודה $(2, 4)$, רדיוסו $\sqrt{20}$ ומרכז על

ציר ה-X

7. שרדיוסו 5 והוא עובר בנקודות $(1, 3)$ ו $(3, -1)$

8. שהנקודות $(5, 3)$ ו $(-1, -3)$ הן קצוות הקוטר שלו.

9. שמרכזו על הישר $Y = X + 1$ והוא עובר בנקודות

$(-1, 0)$ ו $(3, 4)$

11. משוואתו של מעגל היא

$$x^2 + y^2 + 4kx - 2(k - 1)y - 3 = 0$$

מצאו את משוואת המעגל אם מרכזו נמצא:

א. על ציר ה-Y ; ב. על ציר ה-X ; ג. על הישר $Y + 3X - 1 = 0$;

המעגל

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

10. משוואות אלכסוניו של המלבן

$$x - 4 = 0, 3x - 4y = 0$$

אורכי הצלעות הם $\sqrt{20}$ ו $\sqrt{80}$

א. מצאו את משוואת המעגל החוסם את המלבן

ב. מצא את קודקודי המלבן

מצאו מרכז ורדיוס של כל אחד ממעגלים

הבאים

$$1. x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$$

$$2. x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

$$3. x^2 + y^2 - 10x + 5y - 11 = 0$$

$$4. 3x^2 + 3y^2 - 36x + 6y + 21 = 0$$

11. מצאו את משוואת המעגל בו חסום טרפז ABCD. משוואת הבסיס הגדול AB היא $x - y - 2 = 0$, משוואת השוק AD $5x + y - 4 = 0$ ונקודה C היא (1,5).

12. משולש ששטחו 30 ושניים מקודקודיו הם (4,5) ו (0,-3) חסום במעגל שמרכזו על ציר ה-Y. מצאו את הקודקוד השלישי.

13. המעגל $5x^2 + 5y^2 + 10x - 13 = 0$ חסום בריבוע שמשוואת אחת הצלעות היא $k+3y+x=0$ א. מצאו את K; ב. מצאו את משוואות צלעות הריבוע

מצאו את משוואת המעגל

5. שמרכזו בנקודה (-2,-1) והוא עובר בנקודה (-3,6)

6. העובר דרך הנקודה (2,4), רדיוסו $\sqrt{20}$ ומרכז על ציר ה-X

7. שרדיוסו 5 והוא עובר בנקודות (1,3) ו (3,-1)

8. שהנקודות (5,3) ו (-1,-3) הן קצוות הקוטר שלו.

9. שמרכזו על הישר $Y=X+1$ והוא עובר בנקודות (-1,0) ו (3,4)

שאלות חשיבה

1

נתון משולש שווה שוקיים ישר זווית ABC . זווית C שווה ל 90° מעלות. מעבירים תיכון AA' . נקודה C' נמצאת על צלע AB של המשולש. קטע CC' מאונך לקטע AA' . באיזה יחס נקודה C' מחלקת את הצלע AB ?

1. נתון המעגל: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ שמרכזו בנקודה O. הישרים: $y=k$ ו: $x=p$ משיקים למעגל בנקודות A ו-B בהתאמה ונחתכים ברביע השלישי.
- א. ראשית הצירים נמצאת בתוך המעגל.
- ב. ראשית הצירים נמצאת מחוץ למעגל.
- ג. הנקודה O נמצאת מחוץ למעגל שקוטרו AB.
- ד. הנקודה O נמצאת על המעגל שקוטרו AB.

5. מעגל שמרכזו ברביע הראשון משיק לציר ה-x בנקודה A ולציר ה-y בנקודה B.

הנקודה C נמצאת ברביע הראשון על המעגל.

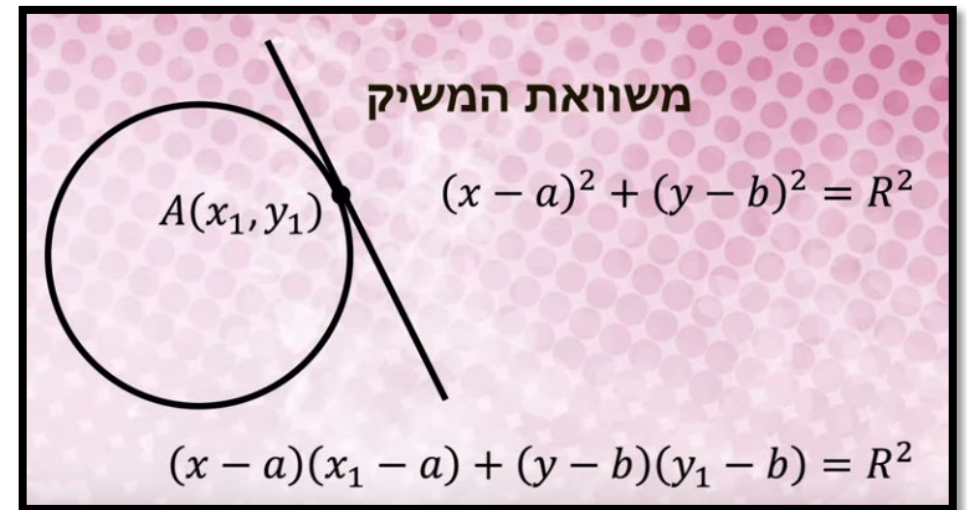
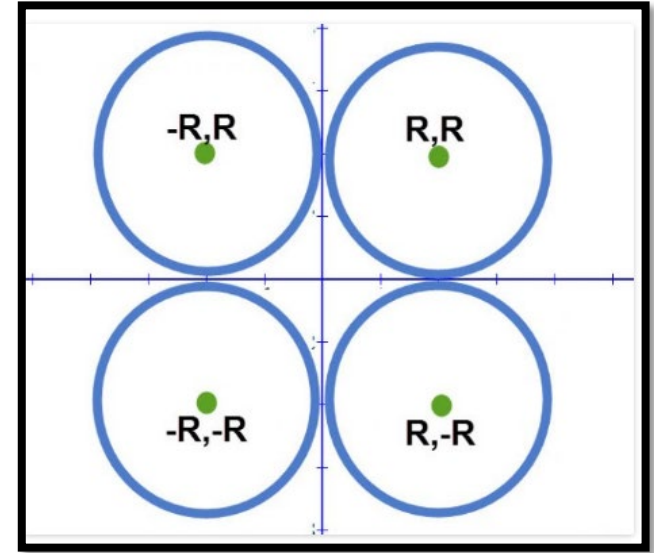
א. יתכן שמתקיים: $\angle ACB = 90^\circ$.

ב. בהכרח מתקיים: $\angle ACB = 45^\circ$.

ג. יתכן שמתקיים: $\angle ACB = 45^\circ$.

ד. יתכן שמתקיים: $\angle ACB = 135^\circ$.

משוואת משיק למעגל בנקודה שעליוהמעגל



משוואת משיק למעגל בנקודה שעליו

7. מעבירים משיקים למעגל קנוני בנקודות $(1,7)$ ו $(5,5)$ שעליו.

מצאו את משוואתו של מעגל

1. הנוגע בציר ה- X , מרכזו על הישר $X = -4$ ברביע השלישי ורדיוסו 6.
2. רדיוסו 1, מרכזו ברביע הרביעי על הישר $3X + Y - 5 = 0$ והוא נוגע בציר ה- X .
3. העובר בנקודה $(-2,-1)$, מרכזו על הישר $2X + Y + 7 = 0$ והוא נוגע בציר ה- Y .

מצאו את משוואת המשיק

4. למעגל $x^2 + y^2 = 20$ בנקודה שעליו, הנמצאת ברביע השני, ושיעור ה- Y שלה הוא 2.
5. למעגל $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$ בנקודה $(5,-4)$.

6. נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(4,-2)$ והוא עובר בראשית הצירים.
א. מצאו את משוואת המשיק למעגל בראשית;
ב. המעגל הנ"ל חותך את כל אחד מהצירים בנקודה נוספת פרט לראשית. הראו שהמשיקים למעגל בנקודות הנ"ל מקבילים זה לזה.

תרגילים ברמה גבוהה

- במשולש ABC נתונים קודקודים: $A(9,9)$ ו $C(5,-3)$
הנקודות D ו E נמצאות על הצלעות AB ו AC בהתאמה כך ש $DE \parallel BC$.
שטח המשולש ADE הוא 18 יח"ר ושטח הטרפז BCED הוא 14 יח"ש.
א. מצאו את שיעורי הנקודה E;
ב. ציר ה-X חוצה את הקטע CD. מצאו את שיעורי הנקודות האפשריות D.
ג. מבין שני הפתרונות שמצאתם בסעיף ב', בחרו נקודה D הקרובה יותר לראשית הצירים. מצאו את שיעורי הנקודה B.
ד. הצלע AC היא קוטר המעגל. מבלי למצוא משוואת המעגל, קבעו האם הנקודה B נמצאת על המעגל.

תרגילים ברמה גבוהה

שטחו של משולש ABC הוא 60 יח"ר. הקודקודים A ו B נמצאים על הישר $y=2x+9$. נתון: $C(9,-3)$. שיעור ה-X של הנקודה A קטן משיעור ה-X של הנקודה B. נסמן את שיעור ה-X של הנקודה A באמצעות a. הנקודה D נמצאת על הקטע AB כך ש: $AD=3BD$.
א. הביעו באמצעות a את שיעורי הנקודה D.
ב. הנקודה E היא אמצע AC. הנקודה F נמצאת על BC כך ש: $DF \perp EF$. שטח המעגל החוסם את המשולש DEF הוא 16.25π יח"ש. מצאו את משוואות המעגלים האפשריים.
ג. קבעו האם אפשר לחסום במעגל מלבן ששטחו 33 יח"ש.

מרתון תרגילים

תרגילים - הקו הישר

1. במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ נתון: $B(-2,5)$, משוואת הגובה היורד מקדקוד הראש לצלע BC היא: $3y - 2x = 6$. נקודת מפגש התיכונים במשולש $\triangle ABC$ נמצאת על הישר $y = 4$.
- א. מצא את שיעורי הקדקודים A ו- C .
- ב. הנקודה F נמצאת ברביע השלישי כך שהקדקוד C הוא מפגש התיכונים במשולש $\triangle ABF$. מצא את שיעורי הנקודה F ואת שטח המשולש $\triangle ABF$.
2. במשולש $\triangle ABC$ נתון: $A(4,6)$. משוואת הגובה לצלע BC היא: $y = 1.5x$. הנקודה E , בה נפגשים הגבהים במשולש, היא אמצע הגובה היורד מהקדקוד B . משוואתו של גובה זה היא: $5y = x$.
- א. מצא את שיעורי הקדקודים B ו- C .
- ב. הנקודה F משלימה את המשולש $\triangle ABC$ למקבילית $BAFC$. חשב את שטח המקבילית.

מרתון תרגילים

ב. הנקודה D היא נקודה על הצלע AB של המשולש ABC .

3. אלכסוני המקבילית $ABCD$ נחתכים על ציר ה- x . הצלעות AB ו- AD נמצאות בהתאמה על הישרים:

$$4y + 3x - 54 = 0 \quad \text{ו} \quad 4y - 3x - 18 = 0$$

א. חשב את היקף המקבילית.

ב. קטע תאמצעים במשולש $\triangle ABD$ חותך את הצלעות AB ו- AD בנקודות M ו- N בהתאמה. חשב את שטח הטרפז $BDNM$.

4. במשולש $\triangle ABC$ נתון: $C(12, 9)$. הקדקודים A ו- B נמצאים על הקרניים החיוביות של צירי ה- x וה- y בהתאמה. ראשית הצירים בנקודה O נתון: $BO = 2AO$. תיכוני המשולש נפגשים בנקודה הנמצאת על הישר $y = 3x - 10$.

א. מצא את שיעורי הקדקודים A ו- B .

ב. מצא את שיעורי נקודת מפגש הנבחים במשולש.

ג. חשב את שטח המשולש.

5. במשולש $\triangle ABC$ הנקודה D נמצאת על הצלע BC . שימוע הישר AD הוא 2.

נתון: $D(1, 1)$, $B(-1, 7)$. ציר ה- x חוצה את הצלע AB . ציר ה- y חוצה את הקטע BD .

הנקודה C הנמצאת ברביעי הרביעי מרוחקת משני הצירים במידה שווה.

א. מצא את שיעורי הקדקוד C .

ב. חשב את שטח המשולש $\triangle ABC$.

ג. ציר ה- y חותך את הצלעות AC ו- BC בנקודות E ו- F בהתאמה. חשב את שטח המרובע $ABFE$.

(הדרכה: שרטט את הנקודות $ABCD$ בצורה פרופורציונית על גבי מערכת צירים).

מרתון תרגילים

6. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$, נתונים קדקוד הראש: $C(11, 3)$ וקדקוד $B(3, 9)$.

תיכונה המשולש $\triangle ABC$ נחתכים בנקודה P הנמצאת על הישר $y = x$.

א. מצא את שיעורי הקדקוד A (שתי אפשרויות).

ב. מבין שתי האפשרויות שמצאת בסעיף א, בחר בנקודה A הקרובה יותר לראשית הצירים.
דרך הנקודה P עובר ישר המקביל לבסיס AB אשר חותך את שוקי המשולש $\triangle ABC$ בנקודות M ו- N . מבלי למצוא את שיעורי הנקודות M ו- N , חשב את אורך MN . בתשובתך השאר שתי ספרות מימין לנקודה העשרונית.

7. אלכסוני הדלתון $ABCD$ נחתכים בנקודה O . משוואת האלכסון המשני של הדלתון היא $y = -x + 2$.

שטח המשולש $ABCD$ גדול פי שלושה משטח המשולש $\triangle ABD$.

הקדקוד C נמצא ברביע השלישי על הישר $y = 2x + 5$. נתון: $AC = 8\sqrt{2}$.

א. מצא את שיעורי הקדקוד C .

ב. שטח הדלתון 32 יחיד. חשב את אורך AB .

8. במשולש $\triangle ABC$ נתונים שיעורי הקדקודים: $A(5, -1)$ ו- $C(-15, 9)$.

הנקודה $D(0, 4)$ נמצאת על הצלע BC .

א. מצא את שיעורי הקדקוד B , הנמצא על הישר $y = x$. בהינתן ששיעוריו מספרים שלמים.

ב. הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות BC ו- AC בהתאמה כך שהקטע EF מקביל לצלע AB .

נתון ששטח הטרפז $ABEF$ גדול פי שלושה משטח המשולש $\triangle CEF$.

מצא את שיעורי הנקודות E ו- F .

9. בטרפז $ABCD$ הבסיס התחתון CD ארוך פי שניים מהבסיס העליון AB . אלכסוני הטרפז נחתכים בראשית הצירים. השוק BC מקבילה לציר ה- y . הקדקוד B נמצא על הישר $y = x$.

שימוע השוק AD הוא 2.

א. הוכח שבבסיסי הטרפז מקבילים לציר ה- x .

ב. שטח הטרפז 27 יחיד. מצא את שיעורי הנקודה E בה נחתכים המשכי השוקים AD ו- BC .

10. במלבן $ABCD$ ששטחו 40 יחיד נתון: $C(6, 4)$. הצלעות AB ו- AD נמצאות בהתאמה על הישרים: $y = mx + 2$ ו- $my + x + 6 = 0$ ($0 < m$). הקדקוד B נמצא ברביע הראשון.

א. מצא את משוואת הישר BD .

ב. הנקודה E נמצאת על הישר BD כך ששטח המשולש $\triangle CDE$ גדול ב-12 יחיד משטח המשולש $\triangle ABE$. מצא את שיעורי הנקודה E . חדרה: שרטט את הנקודות B ו- D במדויק במערכת צירים.

ג. מזוים את שיעורי הנקודות B ו- D כלפי מעלה k יחידות. מזוים את שיעורי הנקודה C ימינה k יחידות אורך. שטח המשולש $ABCD$ לאחר החזזה גדול ב-10 יחיד משטחו לפני החזזה. מצא את k .

תשובות:

1. א. $A(9, 8)$, $C(2, -1)$. ב. $F(-1, -16)$ והשטח 117 יחיד.

2. א. $B(-5, -1)$, $C(7, -9)$. ב. 156 יחיד.

3. א. $A(3, 0)$, $B(0, 6)$. ב. $(2, 4)$. ג. 40.5 יחיד.

4. א. $A(1, 3)$ או $A(11, 13)$. ב. 4.21 יחיד אורך.

5. א. $B(3, 3)$. ב. $E(-6, 6)$, $F(-5, 4)$.

6. א. $x = 2$. ב. $E(2, 4)$. ג. $k = 2$.

7. א. $D(-3, -3)$. ג. 20 יחיד.

8. א. 60 יחיד אורך. ב. 72 יחיד.

9. א. $C(2, -2)$. ב. 30 יחיד. ג. 22 יחיד.

10. א. $C(-5, -5)$. ב. 4 יחיד אורך.

11. א. $E(2, 8)$.

מרתון תרגילים

תרגילים - מעגל

המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל. נתונות הנקודות: $A(6,5)$, $B(8,-5)$, $C(-4,-5)$.

- מצא את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות AC ו- BC .
- מצא את מרכז המעגל.
- חשב את היחס בין שטח המעגל לבין שטח המשולש $\triangle ABC$.

נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ברביע הראשון והיקפו 2.5π יח' אורך. המעגל משיק לציר ה- x ולישר $x = a + 5$ העובר מימין לנקודה O . הנקודה O נמצאת על הישר $y = x + 1$.

- מצא את משוואת המעגל.
- ראשית הצירים בנקודה M . המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות A ו- B כך ש: $BM < AM$. הישר המשיק למעגל בנקודה A חותך את ציר ה- x בנקודה C . מצא את משוואת המעגל החסום ברביע השני בין הצירים לבין הישר AC .

מעגל שמרכזו בנקודה O ברביע הראשון משיק לציר ה- x ולציר ה- y בנקודות A ו- B בהתאמה. הישר $12y + 5x - 60 = 0$ משיק למעגל בנקודה C .

- מצא את משוואת המעגל (שתי האפשרויות).
- מבין שני המעגלים שמצאת בסעיף א', בחר במעגל שמרכזו קרוב יותר לראשית הצירים. מצא את משוואתו של מעגל נוסף שמרכזו על ציר ה- x והוא עובר דרך הנקודות A ו- C .
- חשב את גודל הזווית $\angle ACB$.

$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ א. $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$ א(2) 2.72 א. $(2, -1)$ א. $x = 2, y = -x + 1$ א(2)
 45° א. $(x-12)^2 + y^2 = 100$ א. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ א. $(x-15)^2 + (y-15)^2 = 225$ א(3)
 א. $(x-4)^2 + y^2 = 25$ א(5) 7.7 א. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ א. 10 א. א(6)

1. במשולש $\triangle ABC$ נתונים הקדקודים: $A(9,9)$ ו- $C(5,-3)$.

הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC בהתאמה כך ש: $DE \parallel BC$.
שטח המשולש $\triangle ADE$ הוא 18 יח"ר ושטח הטרפז BCED הוא 14 יח"ר.

א. מצא את שיעורי הנקודה E.

ב. ציר ה-x חוצה את הישר CD. מצא את שיעורי הנקודות האפשריות D.

ג. מבין שני הפתרונות שמצאת בסעיף ב', בחר בנקודה D הקרובה יותר לראשית הצירים.

מצא את שיעורי הנקודה B.

ד. הצלע AC היא קוטר במעגל.

מבלי למצוא את משוואת המעגל, קבע האם הנקודה B נמצאת על המעגל או שאינה עליו. נמק.

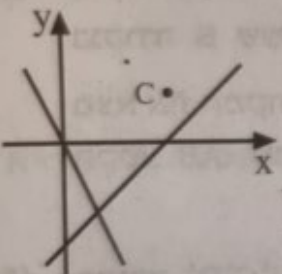
1. שטחו של המשולש $\triangle ABC$ הוא 60 יח"ר. הקדקודים A ו-B נמצאים על הישר $y = 2x + 9$. נתון: $C(9, -3)$. שיעור ה-x של הקדקוד A נמוך משיעור ה-x של הקדקוד B. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A באמצעות a. הנקודה D נמצאת על הקטע AB כך ש: $AD = 3DB$.
- א. הבע באמצעות a את שיעורי הנקודה D.
- ב. הנקודה E היא אמצע AC. הנקודה F נמצאת על BC כך ש: $EF \perp DF$. שטח המעגל החוסם את המשולש $\triangle DEF$ הוא 16.25π יח"ר. מצא את משוואות המעגלים האפשריים.
- ג. קבע האם ניתן לחסום במעגל מלבן ששטחו 33 יח"ר. נמק.

תרגילי חזרה

א. A היא נקודה על הישר $y = -2x$ ו-B היא נקודה על הישר $y = x - 2$. אמצע הקטע AB הוא הנקודה $C(2, 1)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. במשולש ABC הקודקוד A הוא $(2, -5)$ והתיכונים היוצאים מהקודקודים B ו-C הם בהתאמה: $4x + 5y = 0$ ו- $x - 3y = 0$. מצא את שיעורי הקודקודים B ו-C.

הערה: אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'.



1 הנקודות $A(-3, 1)$ ו- $C(5, 7)$ הן שני קודקודים נגדיים במעוין ABCD. אורך האלכסון BD במעוין הוא 20.

א. מצא את משוואת האלכסון BD.

ב. מצא את הקודקודים B ו-D.

במלבן ABCD שיעורי הקודקוד A הם $(3, 4)$. אורך הצלע AB הוא 5 ומשוואת אחד האלכסונים היא $2x + y = 20$.

חשב את שיעורי הקודקודים B, C ו-D של המלבן. (מצא אל כל האפשרויות).

תרגילי חזרה

במשולש OAB (O ראשית הצירים) משוואת הגובה לצלע OB היא $2x+y+2=0$ ומשוואת התיכון לצלע זו היא $5x+y+11=0$. מצא את משוואת הצלע AB .

במשולש ABC שניים מהקודקודים הם: $A(0,0)$, $B(4,1)$. משוואות הגבהים היוצאים מהקודקודים הנ"ל הן: $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
א. מצא את משוואת הגובה לצלע AB .
ב. מצא את אורך הגובה לצלע AB .

תרגילי חזרה

במשולש שווה שוקיים משוואת הבסיס היא $x+2y-10=0$ ומשוואת אחת מהשוקיים היא $y+5\frac{1}{2}x=0$. השוקיים נפגשות בראשית הצירים.

א. מצא את משוואת השוק השנייה של המשולש.

ב. בתוך המשולש, במרחק $\sqrt{5}$ מהבסיס, מעבירים ישר המקביל לבסיס. מצא את משוואת הישר המקביל.

הנקודות $A(1,5)$ ו- $B(3,4)$ הן קודקודים במשולש ABC שנמצא כולו ברביע הראשון ושטחו $4\frac{1}{2}$. משוואת אחת מצלעות המשולש היא $2x-5y+23=0$.

חשב את שיעורי הקודקוד C ומצא את המשוואות של שאר צלעות המשולש.

במקבילית $ABCD$ משוואת הגובה לצלע DC שיוצא מהקודקוד A היא $y=-2x-1$.

משוואת הגובה לצלע BC שיוצא מהקודקוד A היא $x+5y=-14$. שיעורי הקודקוד C הם $(4,3)$.

א. מצא את הקודקוד A .

ב. מצא את הקודקוד D אם נתון שהוא נמצא ברביע הראשון.

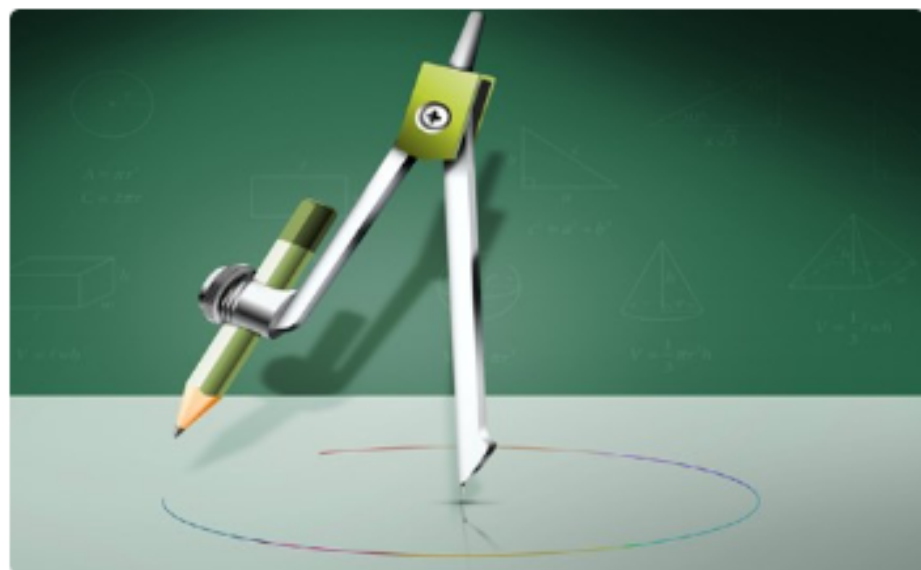
ג. חשב את שטח המקבילית $ABCD$.

תרגילי חזרה

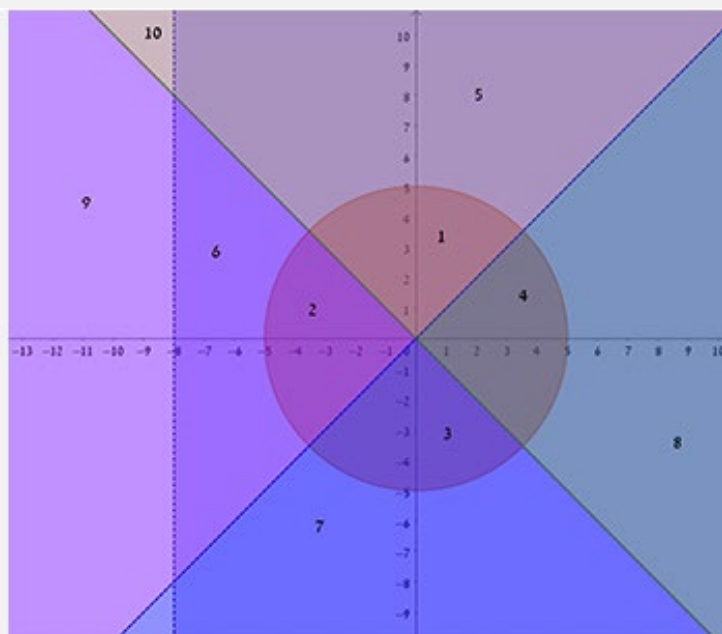
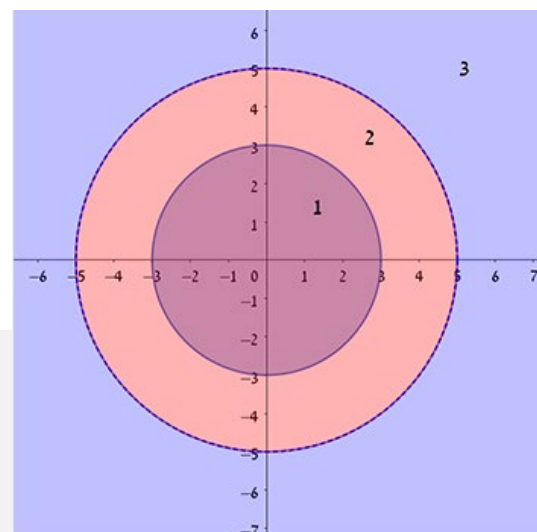
שני המעגלים $x^2 + y^2 = a^2$ ו- $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 64$ נוגעים זה בזה בנקודה בין ראשית הצירים והמרכז של המעגל השני. (הכוונה למגע חיצוני).
א. מצא את רדיוס המעגל הראשון.
ב. מצא את נקודת המגע של שני המעגלים הנ"ל.

שניים מקודקודי משולש ABC הם $B(-2, 20)$ ו- $C(2, -8)$. מרכז המעגל החסום במשולש זה הוא $M(-2, 0)$.
א. מצא את משוואת הצלע AB.
ב. מצא את משוואת הצלע AC.

מקומות גיאומטריים



מקום גאומטרי הוא אוסף של נקודות בעלות תכונה מסוימת. כל נקודה הנמצאת על המקום הגאומטרי מקיימת את התכונה המסוימת, ולהפך – כל נקודה המקיימת את התכונה המסוימת נמצאת על המקום הגאומטרי.



מקומות גיאומטריים

מרחק בין נקודות, חלוקת קטע, שטח משולש

- (1) מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהנקודות $(3, 2)$ ו- $(-3, 5)$.
תשובה: $4x - 2y + 7 = 0$
- (2) מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהפרש ריבועי מרחקיהן מהנקודות $(4, 0)$ ו- $(-2, 3)$, בסדר זה, הוא 9.
תשובה: $2x - y + 1 = 0$
- (3) נתונות הנקודות $A(1, -2)$ ו- $B(3, 0)$. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות C המקיימות: $|AC^2 - BC^2| = 4$.
תשובה: $x + y = 0$, $x + y - 2 = 0$
- (4) מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהן אמצעי הקטעים המחברים את הנקודה $(3, 1)$ עם נקודות הישר $y = 2x + 3$.
תשובה: $y = 2x - 1$
- (5) שני קודקודים של משולש הם $B(2, 0)$ ו- $C(5, 0)$. שיפוע התיכון לצלע AC הוא 2.
מצא את המקום הגיאומטרי של קודקוד A .
תשובה: $y = 2x + 2$, ללא הנקודה $(-1, 0)$.
- (6) ישר מתנועע חותך מהחלקים החיוביים של הצירים שני קטעים שסכומם k . מצא את המקום הגיאומטרי שעליו נע האמצע של קטע הישר שבין שני הצירים.

מקומות גיאומטריים

- (6) מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי כל המעגלים העוברים בנקודות $(3,2)$ ו- $(-1,4)$.
תשובה: $2x - y + 1 = 0$.
- (7) א. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות ששכום ריבועי מרחקיהן מהנקודות $(2,3)$ ו- $(-4,5)$ הוא 70.
ב. הראה שהמקום הגיאומטרי הוא מעגל ומצא את מרכזו ואת רדיוסו.
תשובה: א. $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. ב. $(-1,4)$, 5.
- (8) מנקודה שעל המעגל $x^2 + y^2 = R^2$ מקצים, בכיוון החיובי של ציר ה- x , קטע המקביל לציר ה- x שאורכו k . מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות הקצה הימניות של קטעים כנ"ל.
תשובה: $(x-k)^2 + y^2 = R^2$.
- (9) מנקודה A שעל המעגל $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ מעבירים ישר המאונך לציר ה- x , שחותך את ציר ה- x בנקודה B ואת המעגל בנקודה נוספת C. מהנקודה B מעבירים ישר המקביל לישר שמחבר את A עם מרכז המעגל. ישר זה מ- B חותך את הישר המקביל לציר ה- x שעובר דרך C בנקודה D. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודה D. (מהן ההגבלות?)
תשובה: $x = 3$, $-5 \leq y \leq 5$.
- (10) המעגל $x^2 + y^2 = R^2$, שמרכזו ב- O , חותך את ציר ה- x בנקודה A שממין לראשית. B נקודה על המעגל, שדרכה עובר ישר L_1 המקביל לציר ה- x . דרך A ואמצע BO עובר ישר L_2 . הוכח: המקום הגיאומטרי של מפגש הישרים L_1 ו- L_2 הוא מעגל שרדיוסו R ומרכזו בנקודה $R(-R, 0)$.
- (11) מנקודה A שעל המעגל $x^2 + y^2 = R^2$ מעבירים ישר המאונך לציר ה- x שחותך את הציר בנקודה B וישר המאונך לציר ה- y שחותך את המעגל בנקודה נוספת C. מצא את המקום הגיאומטרי של מפגש הישר BC עם הישר AO. (O הראשית).
תשובה: $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{9}$.
- (12) א. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמתן רואים בוויית ישרה את הקטע שקצותיו הם $(4,2)$ ו- $(-2,-6)$.
ב. הראה שהמקום הגיאומטרי הוא מעגל שחלקע הנייל הוא קוטר שלו.
תשובה: א. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$.
- (13) מצא את המקום הגיאומטרי של אמצעי המיתרים המחברים את נקודות המעגל $x^2 + y^2 = 10x + 8y$ עם הראשית.

האליפסה

אליפסה קנונית

הגדרה:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות,

שסכום מרחקיהן משתי נקודות

קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה.

הערה: הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.

משוואת אליפסה קנונית: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

הקשר בין הפרמטרים של האליפסה: $a^2 - b^2 = c^2$ (c - שיעור ה-x של המוקד)

מושגים באליפסה:

הציר הגדול – הקטע שאליפסה חותכת מציר ה-x

הציר הקטן – הקטע שאליפסה חותכת מציר ה-y

מרכז האליפסה – מפגש צירי האליפסה (באליפסה קנונית הוא ראשית הצירים)

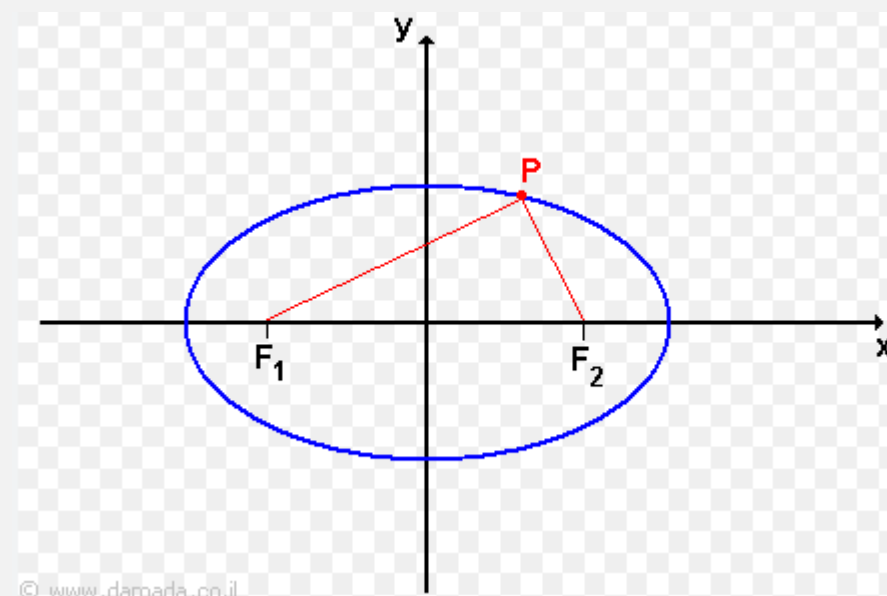
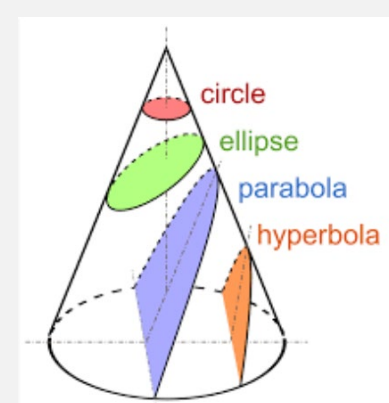
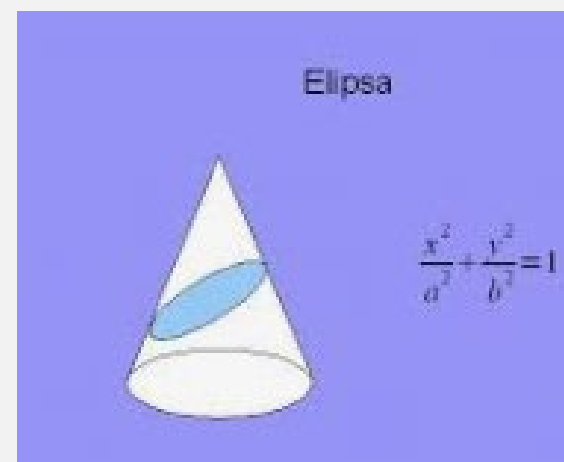
מוקדים – שתי נקודות קבועות שעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה קבוע

שיעורי המוקדים: $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$

רדיוסי וקטור – המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים

מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה

קוטר – מיתר שעובר במרכז האליפסה



© www.damada.co.il

$$a^2 - b^2 = c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תרגילים

0. הגדר את המושג: אליפסה בניהומטריה אנליטית.

1. מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 36$.

2. מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.

3. א. הסבר את הקשר שבין כל הפרמטרים של האליפסה.

ב. מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.

4. מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $(-3\sqrt{3}, 2)$.

5. מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 16$ ומוקד אחד שלה

הוא בנקודה $(\sqrt{10}, 0)$.

6. מצא את משוואתה של אליפסה שחוחכת את ציר ה- y בנקודה $(0, -2\sqrt{5})$ והמרחק בין

המוקד הימני למוקד הימני בה הוא 2.

7. מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $(-2, \sqrt{6})$ ו- $(\sqrt{14}, 1)$.

8. א. הסבר את הנושא- רדיוסי האליפסה.

ב. מצא על האליפסה $3x^2 + 4y^2 = 144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

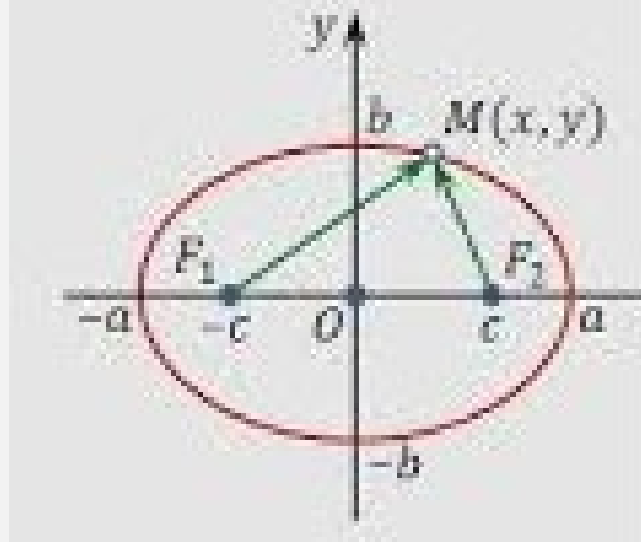
9. מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3, 1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו

למוקדים הוא 6.

10. מצא על האליפסה $x^2 + 3y^2 = 12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע בין שני המוקדים

בזווית ישרה.

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a$$



$$a^2 - b^2 = c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (3) \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (2) \quad 2a = 12, 2b = 6 \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 \quad (6) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1 \quad (5) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (4)$$

$$(4, \sqrt{24}), (4, -\sqrt{24}), (-4, \sqrt{24}), (-4, -\sqrt{24}) \quad (8) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (7)$$

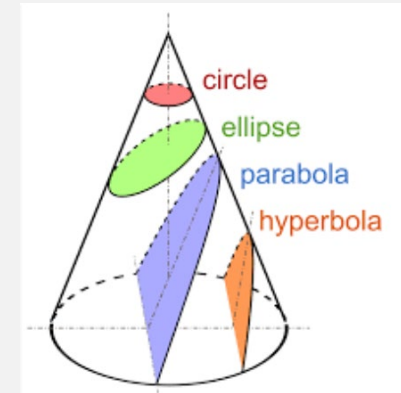
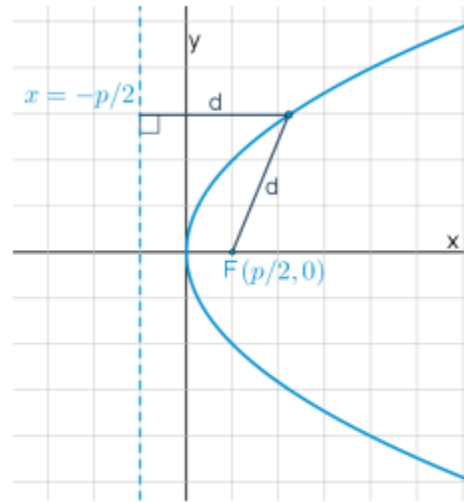
$$(\sqrt{6}, \sqrt{2}), (-\sqrt{6}, \sqrt{2}), (\sqrt{6}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}) \quad (10) \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (9)$$

הפרבולה

פרבולה קנונית

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.



משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2 = 2px$ כאשר p הוא פרמטר הפרבולה.

משיק לפרבולה:

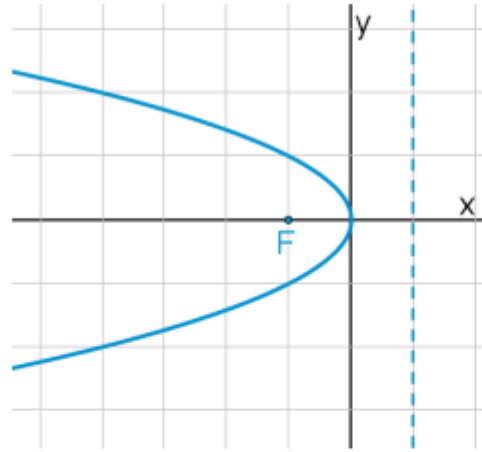
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה הוא: $m = \frac{p}{y_0}$.

מושגים בפרבולה:

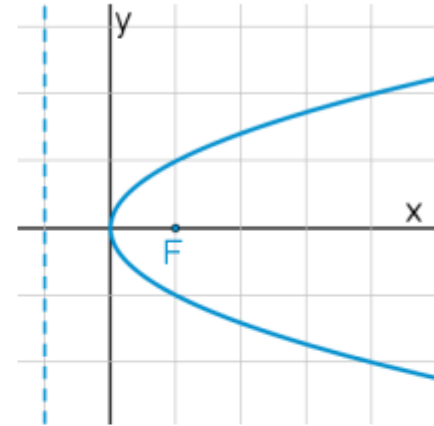
- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r = x + \frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- x אצלנו).

תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה $y^2 = -2px$:



פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$:



שאלות:

- (1) נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.
- (2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x = -3$ הוא המדריך שלה.
- (3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

תשובות סופיות:

$$p = 9, F\left(4\frac{1}{2}, 0\right) \quad (1)$$

$$y^2 = 12x \quad (2)$$

$$y^2 = 10x \quad (3)$$

$$y^2 = 4x \quad (4)$$

$$y^2 = 12x \quad (5)$$

$$\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{15}\right), \left(2\frac{1}{2}, -\sqrt{15}\right) \quad (6)$$

$$(1, \sqrt{8}), (1, -\sqrt{8}) \quad (7)$$

$$\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{p}{4}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right) \quad (8)$$

$$S_{OAB} = 300\sqrt{3} \text{ יח"ש} \quad (9)$$

$$S_{ABO} = 12\sqrt{3}p^2 \text{ יח"ש} \quad (10)$$

$$S_{ABC} = 3\sqrt{3}p^2 \text{ יח"ש} \quad (11)$$

$$S_{ABCF} = 40\frac{5}{8} \text{ יח"ש} \quad (12)$$

$$B\left(\frac{1}{4}, 1\right) \text{ או } B\left(\frac{1}{4}, -1\right) \quad (13)$$

$$y = -2x \text{ או } y = 2x \quad (14)$$

(6) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.

(7) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

(8) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

(9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית

הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 10x$.

(10) הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא

בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 2px$.

(11) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה

צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה- x , וקדקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.

(12) את נקודה A שעל הפרבולה $y^2 = 20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה

אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

(13) קצות מיתר בפרבולה $y^2 = 4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע

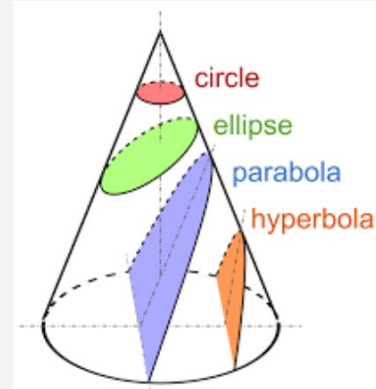
שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- x של נקודה A הוא 4.

(14) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו

מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

ההיפרבולה

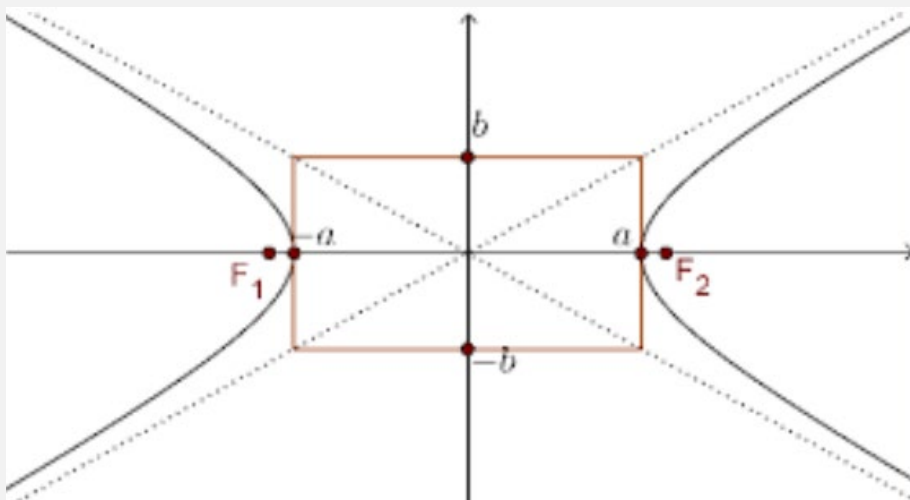
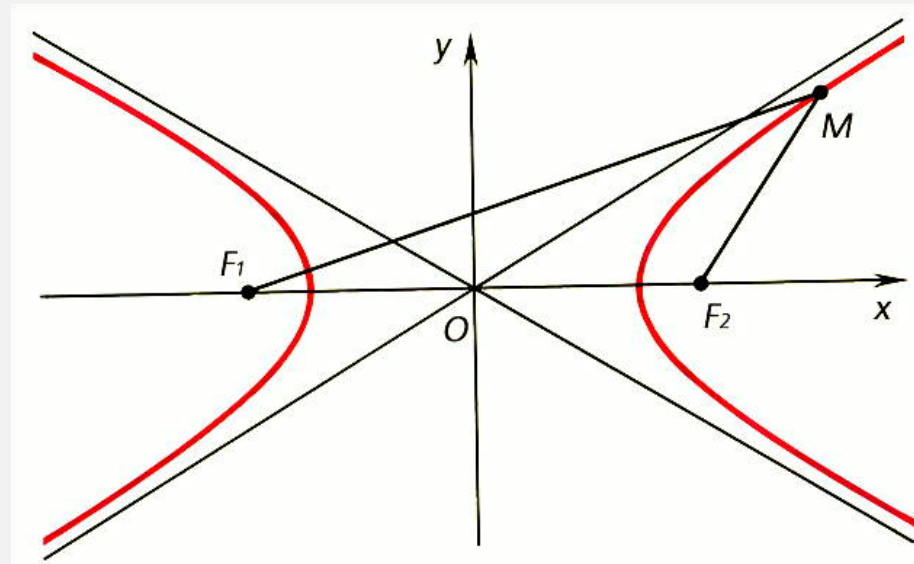
ההיפרבולה היא המקום הגאומטרי של הנקודות ורק אותן נקודות שהערך המוחלט של הפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות F_1 ו- F_2 הוא קבוע. הנקודות F_1 ו- F_2 נקראות **מוקדי ההיפרבולה**.



המקום הגאומטרי של הנקודות שהערך המוחלט של הפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות

$F_1(-c,0)$ ו- $F_2(c,0)$ הוא קבוע $2a$, מתואר על ידי המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, כאשר $b^2 = c^2 - a^2$

הגדרה: ההיפרבולה נקראת **שוות שוקיים** אם $b^2 = a^2$, זאת אומרת שמשוואתה היא $x^2 - y^2 = a^2$



דוגמאות

תרגיל 1

מצאו על ההיפרבולה $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1$ את הנקודות מימין לציר ה- y , שמרחקן מן המוקד השמאלי

הוא $\sqrt{150}$.

פתרון

נסמן את הנקודה המבוקשת ב- (x_1, y_1) . המוקד השמאלי נמצא בנקודה $(-c, 0)$, כאשר

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24 + 12} = 6$$

המרחק בין (x_1, y_1) לבין $(-6, 0)$ הוא $\sqrt{150}$ ולכן $(x_1 + 6)^2 + y_1^2 = 150$. כמו כן, הנקודה

(x_1, y_1) נמצאת על ההיפרבולה ולכן מקיימת את משוואת ההיפרבולה. עתה נותר לפתור את

$$\begin{cases} (x_1 + 6)^2 + y_1^2 = 150 \\ x_1^2 - 2y_1^2 = 24 \end{cases} \quad \text{מערכת המשוואות:}$$

למערכת יש 4 פתרונות (פתרו אותה), שניים מהם מתאימים לתנאי השאלה $(6, \pm\sqrt{6})$ ונמצאים

מימין לציר ה- y .

תרגיל 2

מצאו על ההיפרבולה $3x^2 - 2y^2 = 60$ את הנקודה ברביע הראשון כך שהזווית בין הקטעים המחברים את הנקודה עם המוקדים היא ישרה.

פתרון

נמצא קודם את המיקום של המוקדים: $a^2 = 20$, $b^2 = 30$, לכן $c^2 = 50$. שני המוקדים הם $(\pm\sqrt{50}, 0)$.

נסמן נקודה כללית על ההיפרבולה (x_1, y_1) . על פי הנתון, הזווית בין הקטעים המחברים את

הנקודה עם המוקדים היא ישרה, לכן מכפלת שיפועיהם שווה ל- -1 :

$$\frac{y_1}{x_1 - \sqrt{50}} \cdot \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{50}} = -1$$

מכאן נקבל $x_1^2 + y_1^2 = 50$.

הנקודה (x_1, y_1) על ההיפרבולה, לכן נפתור את מערכת המשוואות:

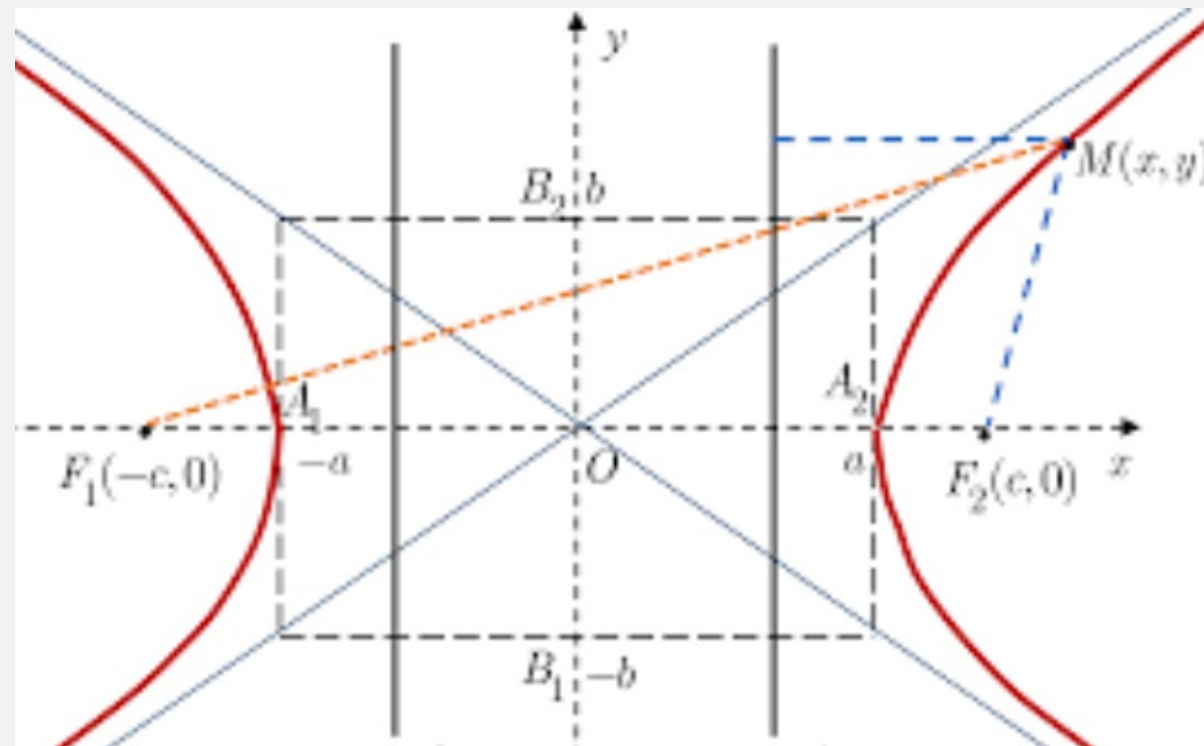
$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 50 \\ 3x_1^2 - 2y_1^2 = 60 \end{cases}$$

ונקבל שהנקודה המבוקשת ברביע הראשון היא $(\sqrt{32}, \sqrt{18})$.

אסימפטוטות של היפרבולה

הישרים $y = -\frac{b}{a}x$ ו- $y = \frac{b}{a}x$ נקראים אסימפטוטות של ההיפרבולה.

כלומר, אסימפטוטה היא ישר שהגרף מתקרב אליו, כך שהמרחק בין הישר והגרף שואף ל-0 כאשר $|x| \rightarrow \infty$



תרגילים

תרגיל 1

מהי המשוואה של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ העוברת בנקודות $(2,1)$ ו- $(-4,8)$? מהן

האסימפטוטות שלה?

פתרון

נציב את שיעורי הנקודות במשוואת ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ונקבל מערכת משוואות ב-a וב-b :

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{16}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1 \end{cases}$$

נתייחס אל מערכת משוואות זו כאל מערכת משוואות מהמעלה הראשונה בנעלמים $\frac{1}{a^2}$ ו- $\frac{1}{b^2}$.

נפתור אותה בשיטת השוואת המקדמים. לשם כך נכפול את המשוואה הראשונה ב-4:

$$\begin{cases} -\frac{16}{a^2} + \frac{4}{b^2} = -4 \\ \frac{16}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{4}{b^2} - \frac{64}{b^2} = -3 \quad \text{נחבר את שתי המשוואות:}$$

$$-\frac{60}{b^2} = -3 \quad \text{ונפתור עבור } b^2:$$

$$b^2 = 20$$

על-ידי הצבת ערך זה במשוואה הראשונה מקבלים את המשוואה

$$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{20} = 1$$

$$a^2 = \frac{80}{21}$$

שפתרונה הוא

$$\text{משוואת ההיפרבולה היא לכן} \quad \frac{x^2}{\frac{80}{21}} - \frac{y^2}{20} = 1 \quad \text{או} \quad 21x^2 - 4y^2 = 80$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{20}{\frac{80}{21}} = \frac{21}{4} \quad \text{נמצא את האסימפטוטות:}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{21}}{2} \quad \text{לכן}$$

$$\text{ומשוואות האסימפטוטות הן:} \quad y = \frac{\sqrt{21}}{2}x \quad \text{ו-} \quad y = -\frac{\sqrt{21}}{2}x$$

תרגיל 2

אחת האסימפטוטות של ההיפרבולה עוברת בנקודה $(-6,3)$, וההיפרבולה עוברת דרך הנקודה $(8,-2)$. מצאו את משוואת ההיפרבולה.

תרגיל 3

מצאו על ההיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ את הנקודה ברביע הראשון שמרחקה מהאסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי הוא 1.2.

תרגיל 2

אחת האסימפטוטות של ההיפרבולה עוברת בנקודה $(-6,3)$, וההיפרבולה עוברת דרך הנקודה $(8,-2)$. מצאו את משוואת ההיפרבולה.

פתרון

האסימפטוטה עוברת גם דרך ראשית הצירים ולכן שיפוע האסימפטוטה הוא 0.5. –

לכן $\frac{b}{a} = 0.5$. הנקודה $(8,-2)$ מקיימת משוואת ההיפרבולה, לכן $\frac{64}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$. כדי לחשב את a

ו- b יש לפתור את מערכת המשוואות המתקבלת ופתרונה היא $a^2 = 48$ ו- $b^2 = 12$. כלומר,

$$\text{משוואת ההיפרבולה היא } \frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{12} = 1$$

תרגיל 3

מצאו על ההיפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ את הנקודה ברביע הראשון שמרחקה מהאסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי הוא 1.2.

פתרון

ניקח נקודה כללית על ההיפרבולה (x_1, y_1) . מתקיימת המשוואה: $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{9} = 1$.

מהנתונים מקבלים כי משוואת האסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי היא $y = \frac{3}{4}x$ או בצורה

הכללית $3x - 4y = 0$. את המרחק של (x_1, y_1) מהאסימפטוטה נמצא על ידי נוסחת המרחק בין

נקודה לישר: $1.2 = \frac{|3x_1 - 4y_1|}{\sqrt{25}}$, לכן $|3x_1 - 4y_1| = 6$. נשים לב שהנקודה (x_1, y_1) נמצאת

על ההיפרבולה ברביע הראשון וכפי שראינו היא חייבת להיות מתחת לאסימפטוטה. עבור כל

נקודה מתחת לאסימפטוטה $3x - 4y = 0$, סימן הביטוי $3x - 4y$ יהיה חיובי, כלומר גם הביטוי

$$3x_1 - 4y_1 = 6 \text{ לכן } 3x_1 - 4y_1 = 6$$

$$\text{נשאר רק לפתור את מערכת המשוואות: } \begin{cases} 3x_1 - 4y_1 = 6 \\ 9x_1^2 - 16y_1^2 = 144 \end{cases} \text{ והנקודה המבוקשת}$$

תהיה $(5, 9/4)$.

תרגילים

ההיפרבולה כמקום גאומטרי ותכונותיה

1. מצאו את ערכי הפרמטרים a^2 ו- b^2 של ההיפרבולות הבאות:

א. $9x^2 - 4y^2 = 36$ ג. $x^2 - 4y^2 = 1$ ה. $36x^2 - y^2 = 16$

ב. $9x^2 - 16y^2 = 144$ ד. $25x^2 = 9 + 4y^2$ ו. $x^2 - 9y^2 = 4$

תשובה: א. 9, 4 ; ב. 16, 9 ; ג. 1, 1/4 ; ד. 9/25, 9/4 ; ה. 4/9, 16 ; ו. 4, 4/9

2. מצאו את מוקדי ההיפרבולות הנתונות:

א. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ג. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = -1$

ב. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{120} = 1$ ד. $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

תשובה: א. $(\pm 5, 0)$; ב. $(\pm 13, 0)$; ג. $(0, \pm 7)$; ד. $(0, \pm 10)$

3. תנו דוגמה להיפרבולה שמוקדיה הם הנקודות

א. $F_1(25, 0)$ ו- $F_2(-25, 0)$

ב. $F_1(36, 0)$ ו- $F_2(-36, 0)$

4. תנו דוגמה להיפרבולה שמוקדיה הם הנקודות

א. $F_1(0, -10)$ ו- $F_2(0, 10)$ ב. $F_1(0, 25)$ ו- $F_2(0, -25)$

5. נתונה היפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. מצאו את a ו- b אם ההיפרבולה עוברת דרך הנקודות:

א. $(5, 1)$ ו- $(3, 0)$ ב. $(-2, 1)$ ו- $(\sqrt{13}, 2)$

תשובה: א. $a = \pm 3$, $b = \pm 0.75$; ב. $a = \pm 1$, $b = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$