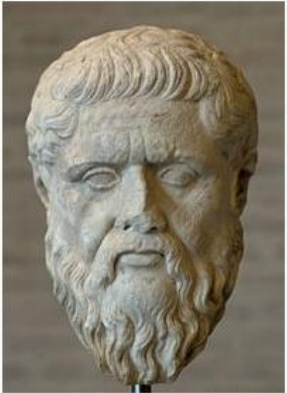


גיאומטריה

מכינה 2023

יחידה ראשונה (שיעורים 1-3)

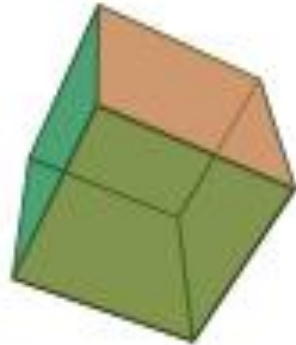


לידה 427-8 או 423-4 לפנה"ס

גופים אפלטוניים



טטראדר
(4)



גקסאדר
(6)



אוקטאדר
(8)



דודאקאדרר
(12)



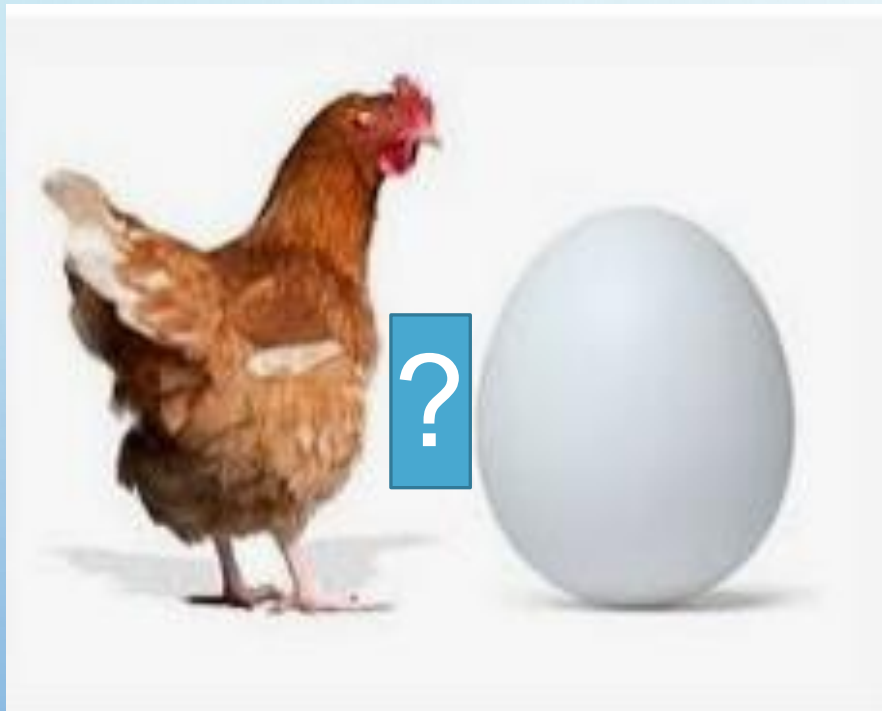
איקוסאדר
(20)

מושגי יסוד

מה זה מושג יסוד ?



מושגי יסוד

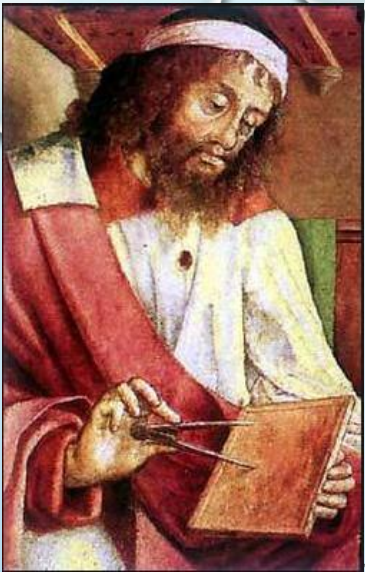


צורה גיאומטרית



נקודה





מנקודה למרחב



"נקודה – מה שאין לו חלקים" (אוקלידס)

"המושג "נקודה" מתייחס לכל פריט שהגודל שלו כל כך קטן ביחס לסביבתו שאפשר לקבל אותו כאפסי.

שתי התכונות העיקריות של הנקודה: **אין** לה **גודל** (יחסית לסביבתה) אבל **יש** לה **מיקום**.

דוגמאות של הנקודה במובן זה : קדקוד של צורה הנדסית (קדקוד של משולש) , עיר על מפת המדינה, אטום בתיאור של מולקולה.

"ישר (קו) זה אורך בלי רוחב" (אוקלידס)

במושג "ישר" ("קו") משתמשים לתיאור של אוסף רציף של אינסוף נקודות.

התכונות העיקריות של הישר (קו) : **אין** לו **רוחב** (הוא בנוי מנקודות " בשורה אחת") אבל **באורך** הוא **אינסופי** משני צדדיו; **בין כל שתי נקודות** על הישר

(קו) **נמצאת לפחות נקודה אחת נוספת** שגם היא שייכת לאותו ישר (קו). (מכאן נובע שבין כל שתי נקודות על הישר (קו) קיימות עוד אינסוף נקודות

נוספות ששייכות לו); הישר (קו) **רציף** (אין לו " חורים ").

דוגמאות של החלקים של הישרים (קווים) במובן זה : צלע של מצולע במישור, נחל במפה פיזית, קשת של מעגל.

במושג **מישור (משטח)** משתמשים לתיאור של אוסף אינסופי של הנקודות . התכונה העיקרית שלו היא שהוא **דו - ממדי**. (יש לו אורך ורוחב אינסופיים

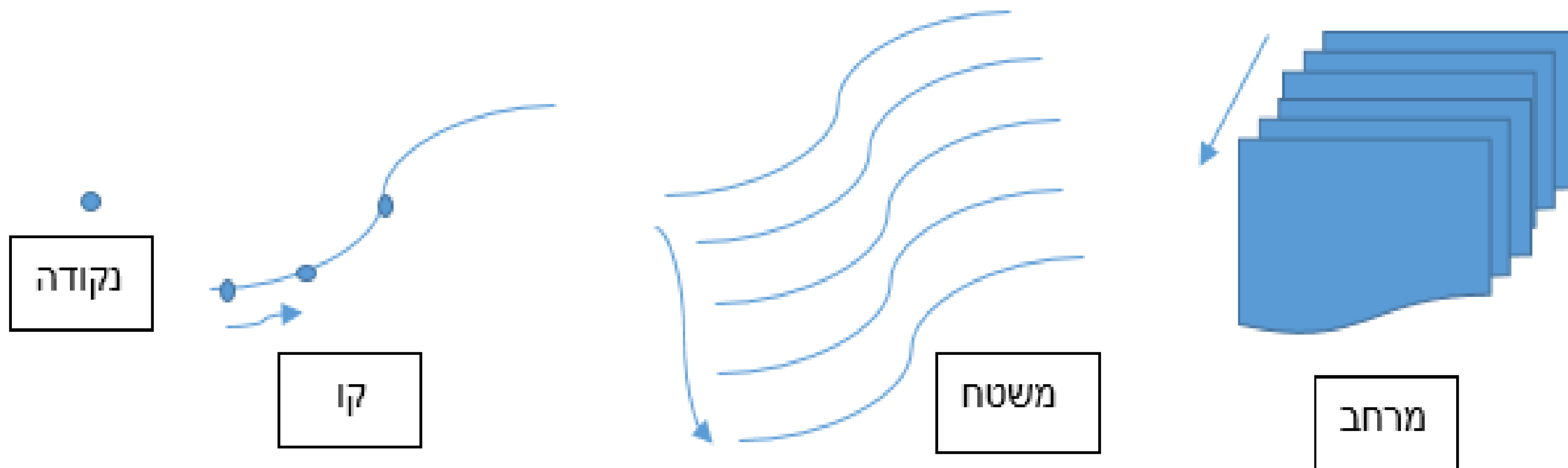
אבל אין לו גובה) .

לדוגמא, ניתן לדמיין מישור (משטח) כדף נייר אינסופית לכל הכיוונים .

המרחב מתאר אוסף **תלת ממדי** של נקודות.

דרך הזזה...

2

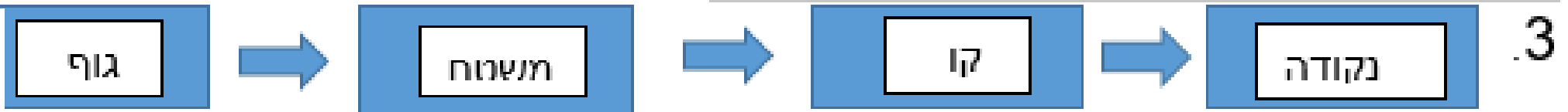


בגישה זו נתחיל מ**נקודה** – "מקום עם גודל אפסי". במהלך התנועה הנקודה תתווה את מסלול התנועה. הוא חד מימדי ולו נקרא **קו** (כך אנחנו מציירים את הקווים : ע"י ההזזה של העיפרון על הדף או טוש על הלוח). אם נזיז את הקו כולו נקבל **משטח**. המשטח הוא דו – מימדי. הזזה של משטח מתארת את המרחב או את החלק שלו. המרחב הוא תלת מימדי (כך בהזזה של ריבוע אפשר לקבל את כל הנקודות של הקובייה, או אם נסבב את עיגול סביב קוטרו נקבל את כל הנקודות של הכדור).

מגוף לנקודה...

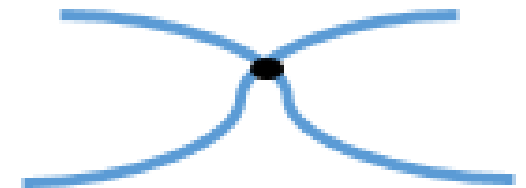
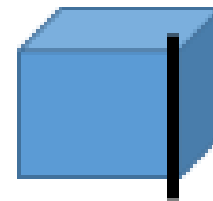


Henri Poincaré - eAnswers



"אם לא היו גופים לא הייתה גיאומטריה" (אנרי פואנקרה (1854-1912))

בגישה זו נקודת ההתחלה היא **גוף**. גוף הוא החלק של המרחב שיש לו שלושה מימדים (אנחנו קוראים להם אורך, רוחב וגובה). הגוף מוגבל ע"י המשטח שמפריד אותו משאר המרחב. המשטח הוא דו – מימדי (רוחב ואורך). **קו** הוא חיתוך בין שני משטחים. הוא חד – מימדי (אורך). הנקודה היא חיתוך בין שני קווים והיא חסרת מימד.



סיכום: לכל אחת מהגישות האלה יש היגיון משלה. אבל אף אחד מהן לא מסוגלת להגדיר את המושגים הגיאומטריים הבסיסיים. המושגים **נקודה**, **ישר**, **מישור** – הם מושגי יסוד של גיאומטריה. עליהם בנויה מערכת האקסיומות.

מערכות של אקסיומות



אויקלידס : אקסיומה – זה מה שנובע ממשמעות המילים

1. אקסיומות של אויקלידס ("יסודו")

1. דברים השווים לאותו דבר שווים זה לזה.
2. אם מוסיפים שווים לשווים התוצאות שוות.
3. אם מחסרים שווים משווים התוצאות שוות.
4. אם לוקחים כפליים שווים התוצאות שוות.
5. השלם גדול מחלק.

האם באמת השלם תמיד גדול מחלק? ובאיזה מובן "גדול"?

דוגמא

ניקח קטע AB שווה ל 2 וחלק ממנו: קטע CD ששווה ל 1.

מצד אחד ברור ששלם גדול מחלק, לכן

$$AB > CD$$

אבל נזכיר שקטע הוא אוסף של נקודות.

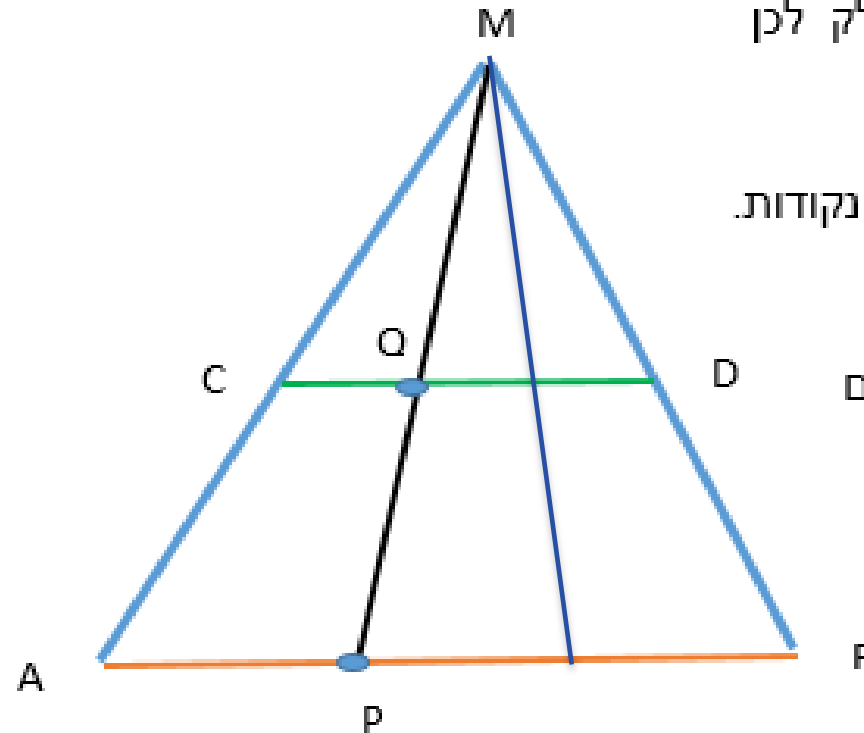
נשווה כמות הנקודות בשני

הקטעים. לצורך זה נעביר ישרים

דרך הנקודות $D \parallel B, C \parallel A$

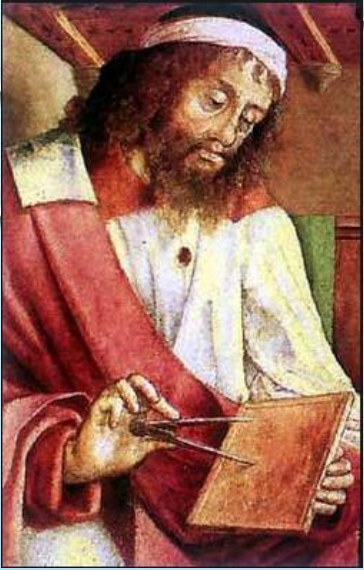
נסמן את נקודת המפגש של

הישרים ב M.



נבחר על הקטע AB נקודה P ונעביר קטע MP. נסמן:

$Q = MP \cap CD$. באותה צורה אם נבחר נקודה כלשהי על CD ונעביר דרך נקודה M ישר, הוא יחתוך את AB בנקודה אחת בלבד. כך לכל נקודה על AB מתאימה נקודה אחת בלבד על CD. ולהפך, לכל נקודה על CD מתאימה נקודה אחת בלבד על AB. לכן יש התאמה חד משמעית בין הנקודות של שני הקטעים. אז הקטעים שווים???



פוסטולטים של אוקלידס:

**אוקלידס : פוסטולטים - זה מה שמקובל
אבל לא ניתן להוכיח.**

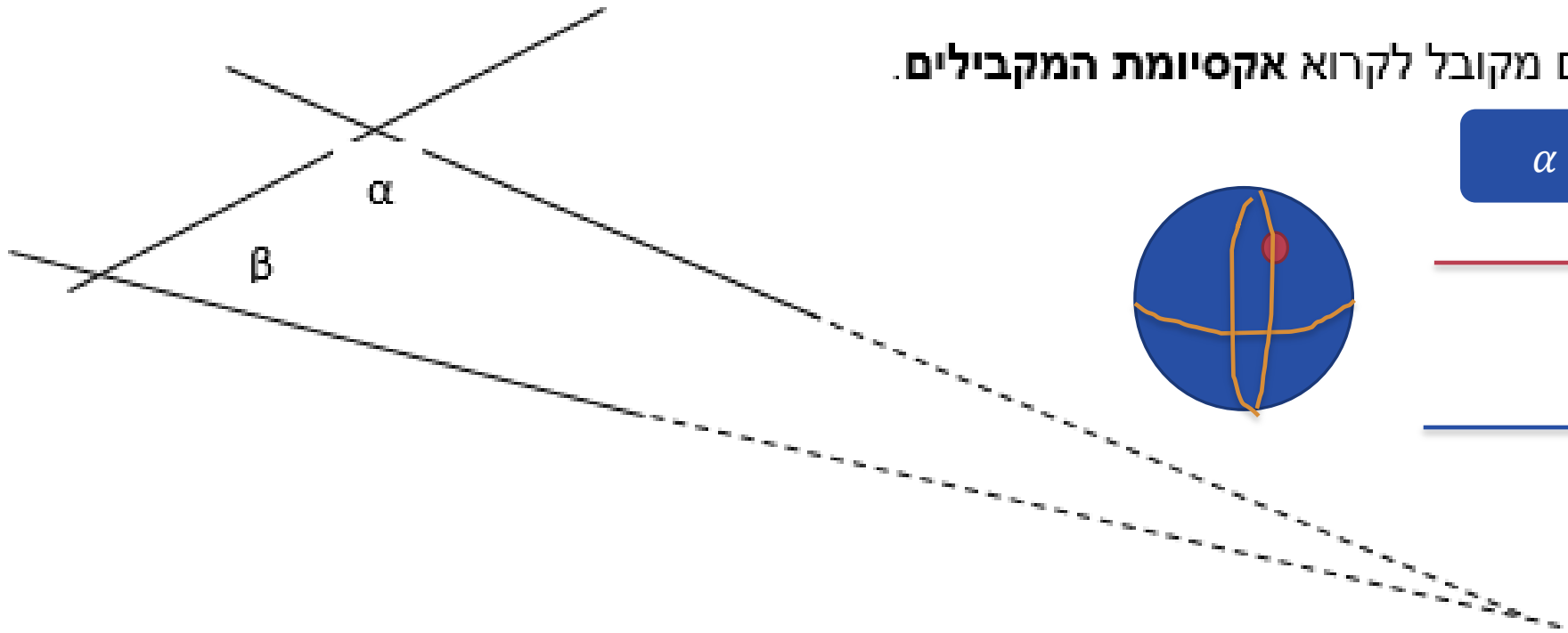
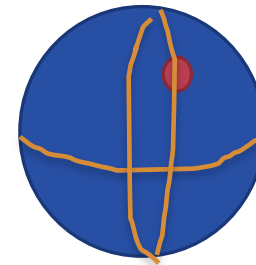
1. דרך כל שתי נקודות אפשר להעביר ישר.
2. על ישר קיימים קטעים סופיים.
3. אפשר לבנות מעגל עם כל רדיוס נתון
סביב כל נקודה על המישור.
4. כל זוויות ישרות שוות זו לזו.

הפוסטולט החמישי של אוקלידס

5. אם קו ישר חותך שני ישרים כך שהזוויות הפנימיות באותו צד סכומם פחות מפעמיים זווית ישרה אז אם נמשיך את השרים ללא הגבלה הם יפגשו באותו צד.

לפוסטולט זה היום מקובל לקרוא **אקסיומת המקבילים**.

$$\alpha + \beta < 2 \cdot 90^\circ$$



III. פוסטולטים של ארכימדס



1. בין כל הקווים עם אותן נקודות קצה הישר קצר ביותר.

השחור קצר מהכחול



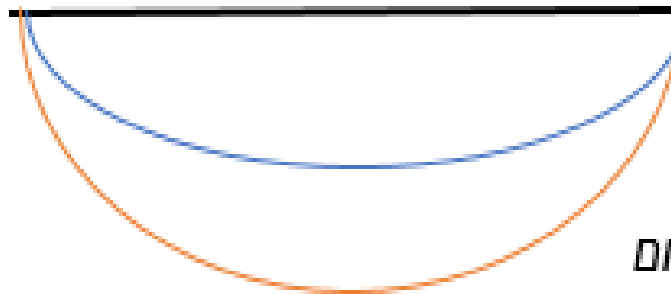
2. בין שני קווים קמורים שונים עם אותן נקודות קצה באותו מישור אם אחד נמצא בין השני והישר שמחבר קצוות אז הוא קצר מהשני.

לשלושה

קווים יש אותם קצוות.

הקו הכחול שנמצא בין הישר והקו הכתום

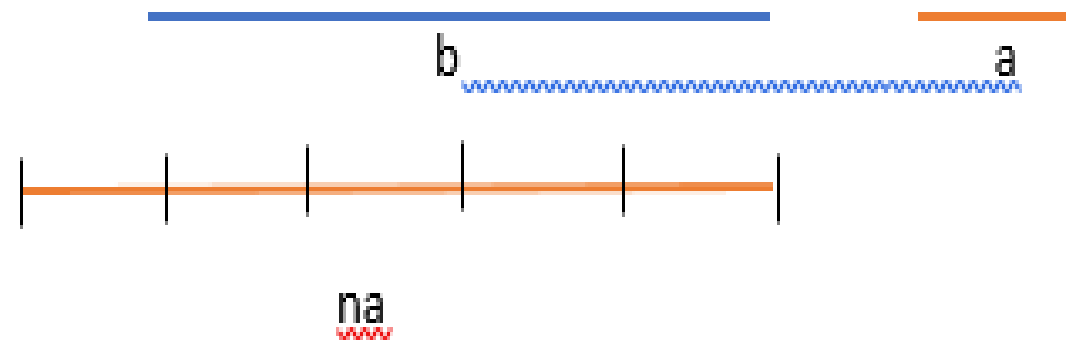
קצר מהכתום.



התכונה הארכימדית של הקבוצה

3. אם $a < b$ אז קיים מספר טבעי n שעבורו $na > b$.

$b \mid a$ יכולים להיות מספרים ממשיים, צורות במישור או במרחב.



לתכונה זו של הקבוצה קוראים **התכונה הארכימדית של הקבוצה**. רק במאה ה-19 התבררה המשמעות של [הפוסטולט שבעצם טוען שבקבוצה שמקיימת את התכונה זו לא קיימים ערכים גדולים או קטנים עד אינסוף].

בסוף מאה ה-19 - תחילה המאה ה-20 המתמטיקאים שוב חוזרים לשאלה: מה הן האקסיומות, כמה ואילו מהן צריכות להיות בבסיס של גיאומטריה.

iv. מערכת האקסיומות של הילברט (אקסיומות השייכות)

(סה"כ 15 אקסיומות, ניקח לדוגמא 3 מהן)

1. לכל 2 נקודות $A \neq B$ קיים ישר a שמכיל אותן

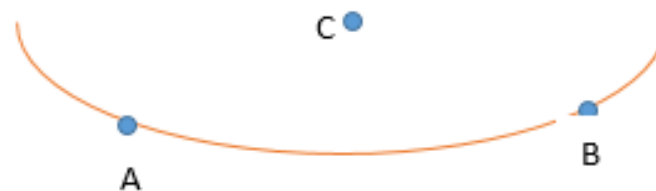
a



2. לכל שתי נקודות $A \neq B$ קיים רק ישר אחד שמכיל אותן.



3. על כל ישר יש לפחות שתי נקודות. קיימות לפחות שלוש נקודות שלא שייכות לישר אחד





Birkhoff (1884-1944)

VI. אקסיומות של בירקהוף

1. אקסיומת הסרגל

אם על הישר לבחור נקודת ההתחלה וכיוון אז לכל נקודה על הישר אפשר חד משמעית להתאים מספר ממשי.

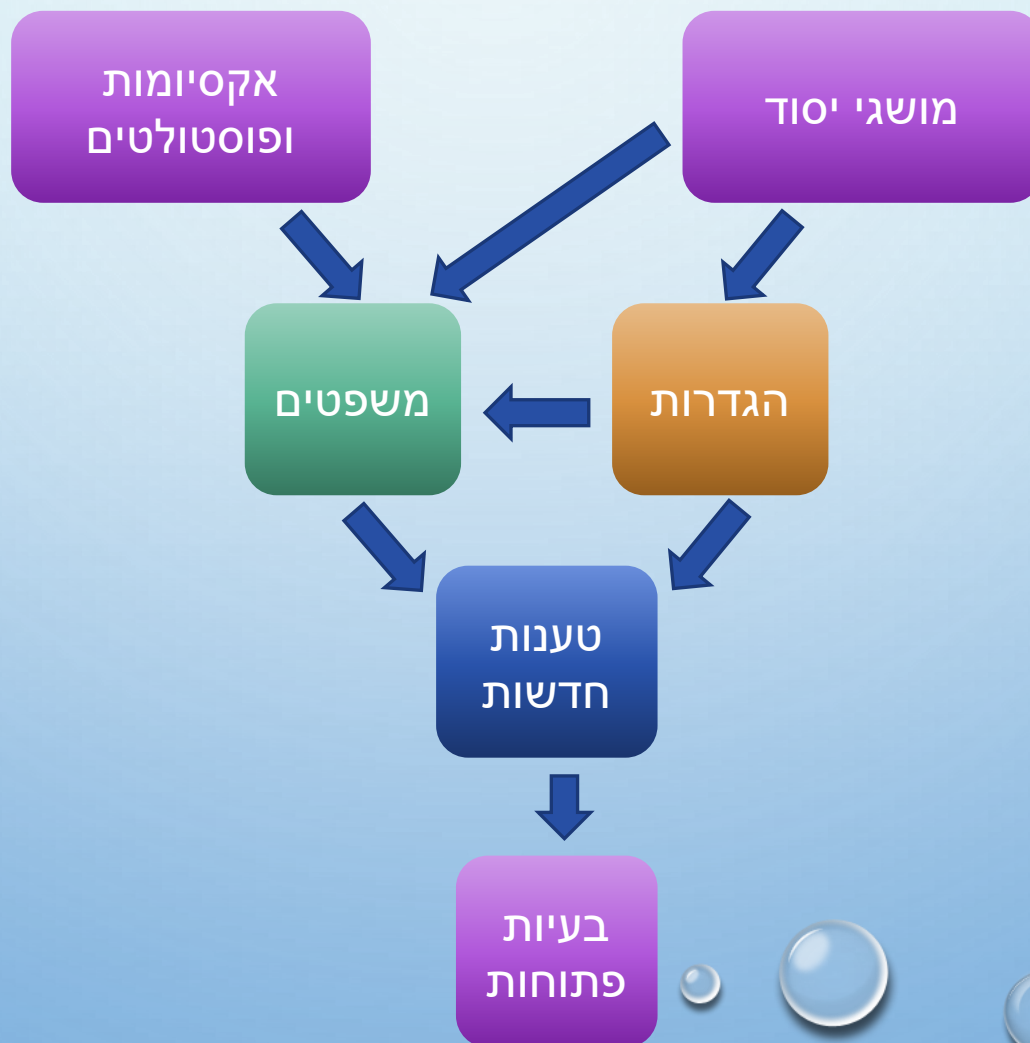
2. אקסיומה ישרים

דרך כל שתי נקודות על המישור עובר ישר.

3. אקסיומה של מד זווית

אם לבחור נקודת ההתחלה וכיוון הסיבוב אז לכל קרן שמתחילה בנקודת ההתחלה אפשר להתאים חד משמעית מספר ממשי מתחום בין 0 ל 2π

גיאומטריה איקלידית



נקודה
קו
קו ישר
מישור
מרחב

1. דרך כל שתי נקודות אפשר להעביר ישר.
2. על ישר קיימים קטעים סופיים.
3. אפשר לבנות מעגל עם כל רדיוס נתון סביב כל נקודה על המישור.
4. כל זוויות ישרות שוות זו לזו.

5. דרך נקודה מחוץ לישר אפשר להעביר ישר מקביל לישר הנתון ורק אחד ישרים מקבילים הם ישרים שאין להם נקודות משותפות

הגדרות

קרן – היא חלק מקו ישר המוגבל מצד אחד על ידי נקודה

קטע – הוא חלק מקו ישר המוגבל משני צדדים על ידי על ידי נקודות

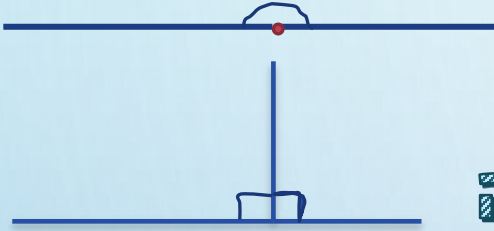
זווית – צורה גיאומטרית הבנויה משתי קרניים היוצאות מנקודה אחת

לנקודה קוראים קודקוד הזווית

חוצה זווית – קרן שיוצאת מקודקוד הזווית ומחלקת אותה לשתי זוויות שוות

מיון זוויות

זווית שטוחה – היא זווית ששתי הקרניים שלה נמצאות
על ישר אחד משני הצדדים של הקודקוד



זווית ישרה – היא זווית שמהווה מחצית של זווית שטוחה

על פי הפוסטולט הרביעי של אוקלידס:

כל הזוויות הישרות שוות זו לזו

זווית בת מעלה אחת – היא חלק המהווה $\frac{1}{180}$ מזווית השטוחה



זווית חדה – היא זווית שגודלה בין 0 ל 90 מעלות



זווית קהה – היא זווית שגודלה בין 90 ל 180 מעלות

הגדרות קשורות לזוויות

זוויות צמודות – הן שתי זוויות בעלות תכונות הבאות:

❖ יש להן קודקוד משותף

❖ יש להן קרן משותפת

❖ שתי הקרניים האחרות מהוות זווית שטוחה

זוויות קודקודיות – הן שתי זוויות בעלות תכונות הבאות:

❖ יש להן קודקוד משותף

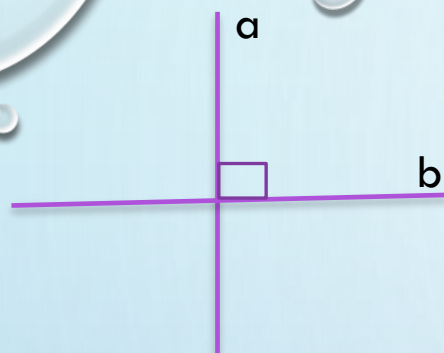
❖ קרן אחת של אחת הזוויות יוצרת זווית שטוחה עם קרן

אחת של הזווית השנייה

❖ הקרן השנייה של אותה זווית יוצרת זווית שטוחה עם

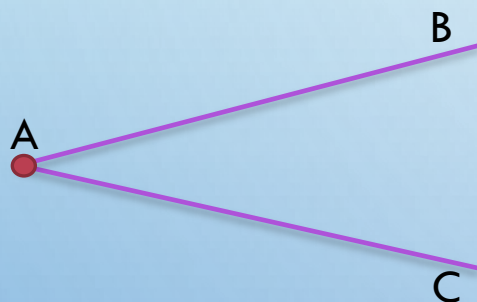
הקרן השנייה של הזווית השנייה

סימון קטעים וזוויות



$$a \perp b$$

הישרים a ו- b מאונכים זה לזה,
יוצרות זווית בת 90°



$\angle BAC$

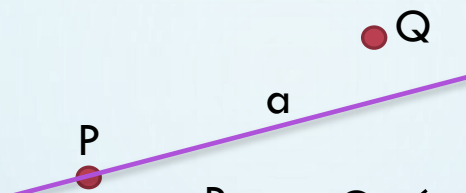
זווית BAC

$\angle A$

זווית A

$\angle \alpha$

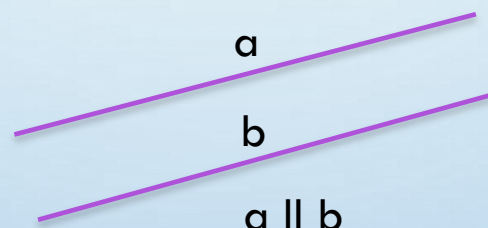
זווית α



$$P \in a \quad Q \notin a$$

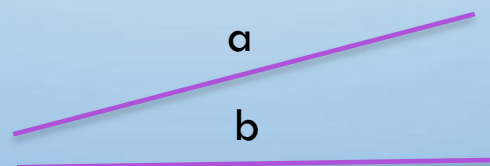
נקודה P שייכת לישר a

נקודה Q לא שייכת לישר a



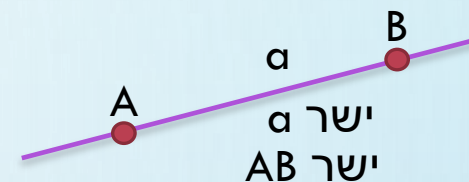
$$a \parallel b$$

הישרים a ו- b מקבילים זה לזה

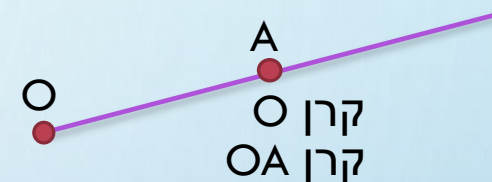


$$a \not\parallel b$$

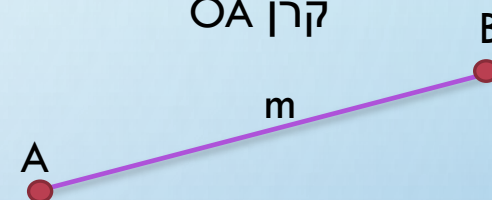
הישרים a ו- b לא מקבילים זה לזה



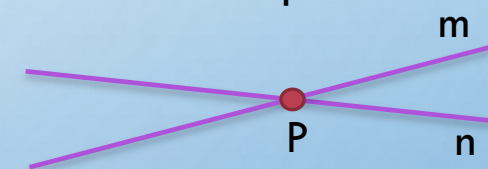
ישר a
ישר AB



קטע OA
קטע OA



קטע AB
קטע m



$$P = m \cap n$$

נקודה P היא נקודת החיתוך
של הישרים m ו- n

משפטים

משפט

אם

A

אז

B

משפט הפוך

אם

B

אז

A

המשפט שמתקיים
לשני הכיוונים

אם ורק אם (אם"ם)



אם

A

אז

B

וגם אם

B

אז

A

נתון: A

צ.ל.: B

שרטוט

הוכחה:

טענה	נימוק

המשפטים

משפט על זוויות צמודות

משפט הפוך: אם סכום זוויות שווה ל 180° אז הן צמודות

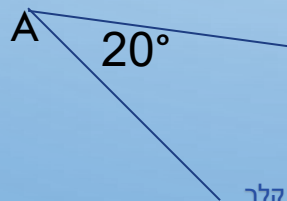
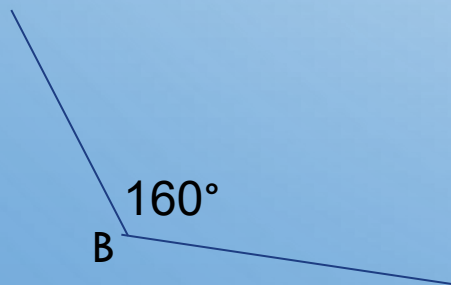
הטענה היא לא נכונה.

נוכיח את זה על ידי דוגמא נגדית
(דוגמא נגדית היא דוגמא שסותרת את
הטענה, שבה למרות ש B מתקיים A לא
מתקיים)

ניקח שתי זוויות עם קודקודים

שונים: $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 160^\circ$.

למרות ש $\angle A + \angle B = 180^\circ$, הן לא זוויות
צמודות על פי ההגדרה (אין להן קודקוד
משותף)



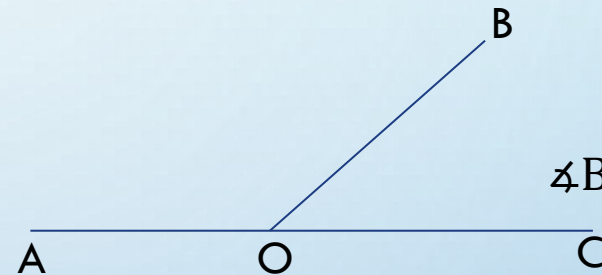
משפט: אם הזוויות הן צמודות אז הסכום שלהן שווה ל 180°

משפט: סכום זוויות צמודות שווה ל 180°

נתון:

$\angle AOB$, $\angle BOC$ צמודות

צ.ל.: $\angle BOC + \angle AOB = 180^\circ$



נימוק	טענה	
על פי ההגדרה של זוויות צמודות	$\angle AOC$ שטוחה	1
על פי ההגדרה של זווית בת מעלה אחת	$\angle AOC = 180^\circ$	2
	$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$	3
על פי 2 ו 3	$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$	4
	מ.ש.ל. (מה שצריך להוכיח)	

המשפטים

משפט על זוויות קודקודיות

משפט הפוך: אם שתי זוויות שוות אז הן קודקודיות

הטענה היא לא נכונה.

נוכיח את זה על ידי דוגמא נגדית

ניקח שתי זוויות עם קודקודים שונים: $A=20^\circ$, $\angle B=20^\circ$.

למרות ש $\angle A = \angle B$, הן לא זוויות קודקודיות על פי ההגדרה (אין להן קודקוד משותף)

A 20°

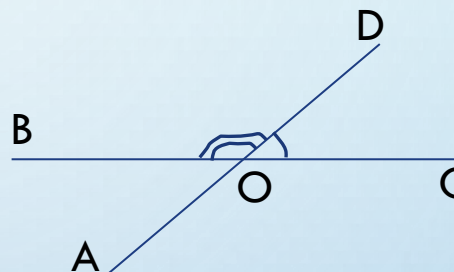
B 20°

משפט: אם הזוויות הן קודקודיות אז הן שוות זו לזו

משפט: זוויות קודקודיות שוות זו לזו

נתון:

$\angle DOB$, $\angle AOB$ קודקודיות
צ.ל. $\angle AOB = \angle DOB$



נימוק	טענה	
על פי ההגדרה של זוויות צמודות	$\angle BOD$ ו $\angle DOB$ זוויות צמודות	1
משפט: סכום זוויות צמודות שווה ל 180°	$\angle BOD + \angle DOB = 180^\circ$	2
על פי ההגדרה של זוויות צמודות	$\angle BOD$ ו $\angle AOB$ זוויות צמודות	3
משפט: סכום זוויות צמודות שווה ל 180°	$\angle BOD + \angle AOB = 180^\circ$	4
על פי 2,4	$\angle DOB = \angle AOB$	5
	מ.ש.ל	

משפט הפוך על זוויות קודקודיות

משפט הפוך: אם שתי זוויות שוות אז הן קודקודיות

הטענה היא לא נכונה.

איך אפשר "לתקן" את הטענה כדי שהיא תהיה נכונה?

ניסיון ראשון: שתי

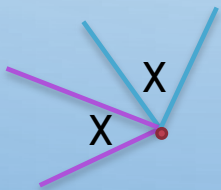
זווית שוות עם

קודקוד משותף הן

קודקודיות?

לא!

דוגמא נגדית:



ניסיון שני: שתי זווית

שוות עם קודקוד

משותף וקרן אחת של

אחת הזוויות נמצאת

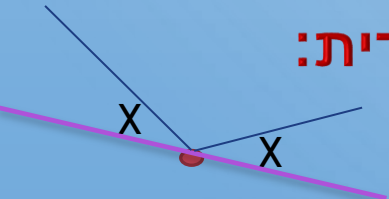
על ישר אחד עם קרן

אחת של הזווית

השנייה הן קודקודיות?

לא!

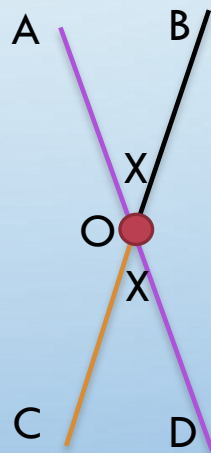
דוגמא נגדית:



הטענה הנכונה: אם לשתי זוויות יש קודקוד משותף, קרן אחת של אחת הזוויות נמצאת על ישר אחד עם קרן אחת של הזווית השנייה, שתי קרניים האחרות שלהן נמצאות משני הצדדים של ישר זה וזוויות שוות זו לזו אז הן קודקודיות (זאת אומרת שגם שתי הקרניים האחרות שלהן נמצאות על ישר אחד).

הוכחה:

נימק	טענה	
סימון, נתון	$\angle AOB = \angle COD = X$	1
נתון	AOD קו ישר	3
זווית שטוחה	$\angle AOD = 180^\circ$	4
על פי 1, 4	$\angle BOD = 180^\circ - X$	5
על פי 2, 5	$\angle BOD + \angle COD = 180^\circ - X + X = 180^\circ$	6
על פי 6	$\angle BOC = \angle BOD + \angle COD = 180^\circ$	7
על פי 7	BOC קו ישר	8
נתון, 8, הגדרה	$\angle AOB, \angle COD$ קודקודיות	9
	מ.ש.ל	





שאלות חשיבה

1. נתונה נקודה על המישור. מהי כמות הגדולה ביותר של קרניים שיוצאות מנקודה זו אם כל הזוויות שהן יוצרות הן זוויות קהות? (תנו תשובה גיאומטרית ותשובה אלגברית).

2. נתונה נקודה על המישור. מהי כמות הקטנה ביותר של קרניים שיוצאות מנקודה זו אם כל הזוויות שנוצרות בין שתי קרניים סמוכות הן זוויות חדות? (תנו תשובה גיאומטרית ותשובה אלגברית).

3. מנקודה O שנמצאת על המישור יוצאות 4 קרניים, אחת אחרי השנייה בכיוון השעון. הקרניים הן: OA, OB, OC, OD. ידוע שסכום הזוויות AOB ו-COD שווה ל-180 מעלות. הוכיחו שזווית בין חוצי זוויות AOC ו-BOD שווה ל-90 מעלות.

4. הוכיחו שאם חוצי זוויות AOB ו-BOC מאונכים זה לזה אז הנקודות A, O, C נמצאות על ישר אחד.

דיון על שאלות חשיבה

1. נתונה נקודה על המישור. מהי כמות הגדולה ביותר של קרניים שיוצאות מנקודה זו אם כל הזוויות שהן יוצרות הן זוויות קהות? (תנו תשובה גיאומטרית ותשובה אלגברית).

גישה אלגברית

על פי דרישת הבעיה כל הזוויות הן קהות, זאת

אומרת גדולות מי 90° .

סה"כ n זוויות שסכומן 360°

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \dots = 360^\circ$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle 1 = 90^\circ + \alpha \\ \angle 2 = 90^\circ + \beta \\ \angle 3 = 90^\circ + \gamma \\ : \\ : \end{array} \right. \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \dots = 90^\circ n + \alpha + \beta + \gamma + \dots = 360^\circ$$

$$90^\circ n = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma - \dots$$

$$90^\circ n < 360^\circ$$

$$n < 4$$

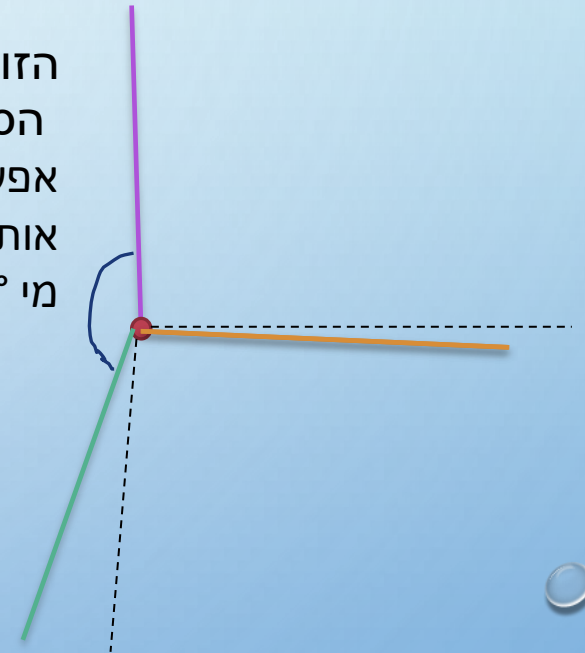
$$n = 3$$

2. נתונה נקודה על המישור. מהי כמות הקטנה ביותר של קרניים שיוצאות מנקודה זו אם כל הזוויות שנוצרות בין שתי קרניים סמוכות הן זוויות חדות? (תנו תשובה גיאומטרית ותשובה אלגברית).

$$n = 5$$

גישה גיאומטרית

הזווית בין הקרן הירוקה והקרן הסגולה קטנה מי 180° לכן אי אפשר להוסיף עוד קרן שתחלק אותה לשתי זוויות קהות (גדולות מי 90°)



תשובה: הכמות המקסימלית היא 3 קרניים

דיון על שאלות חשיבה

3. מנקודה O שנמצאת על המישור יוצאות 4 קרניים, אחת אחרי השנייה בכיוון השעון. הקרניים הן: OA, OB, OC, OD. ידוע שסכום הזוויות AOB ו COD שווה ל 180 מעלות. הוכיחו שזווית בין חוצי זוויות AOC ו BOD שווה ל 90 מעלות.

$$\angle AOB = \alpha, \angle BOC = \beta \text{ נסמן}$$

$$\angle MON = \angle BOM - \angle BON$$

$$\angle BOM = 0.5 \angle BOD$$

$$\angle BOD = \angle BOC + \angle COD = \beta + 180^\circ - \alpha$$

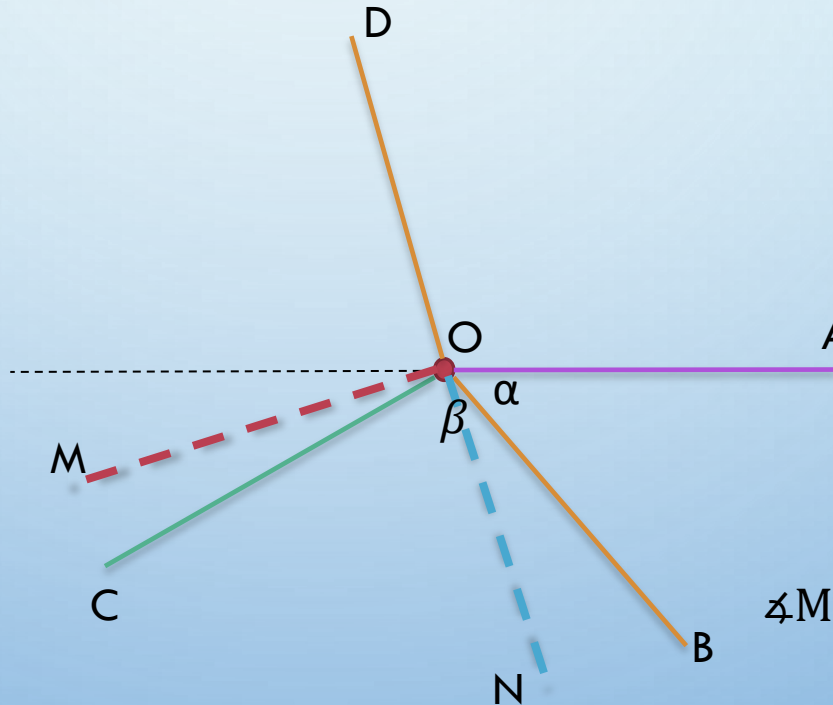
$$\angle BOM = 0.5 (\beta + 180^\circ - \alpha)$$

$$\angle BON = \angle AON - \angle AOB = 0.5(\alpha + \beta) - \alpha$$

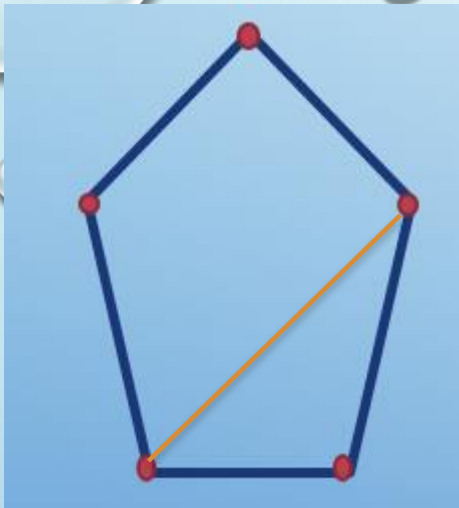
$$\angle BON = 0.5(\beta - \alpha)$$

$$\angle MON = 0.5 (\beta + 180^\circ - \alpha) - 0.5(\beta - \alpha) = 90^\circ$$

$$\angle MON = 90^\circ$$



הגדרות: מצולעים



מצולע – צורה גיאומטרית סגורה הבנויה מכמות סופית של קטעים שלא חותכים אחד את השני

לקטעים קוראים **צלעות המצולע** ולנקודות המפגש שלהם קוראים **קודקודי המצולע**

אלכסון – קטע שמחבר שני קודקודים הלא סמוכים של המצולע

מצולע קמור – מצולע שכל האלכסונים שלו נמצאים בתוך המצולע.

מצולע קעור – מצולע שלפחות אחד מאלכסוניו שלו נמצא מחוץ למצולע.

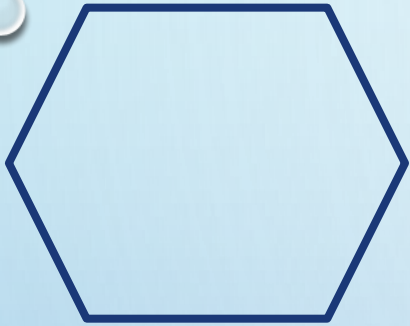
מצולע קעור



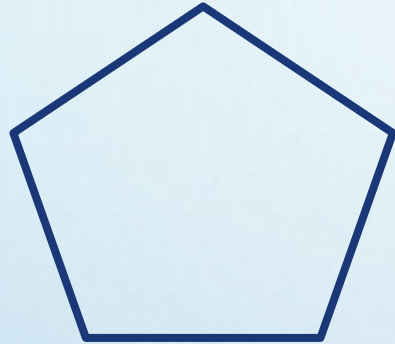
מצולע קמור



המצולעים



משושה



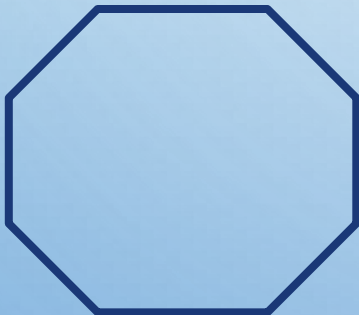
מחומש



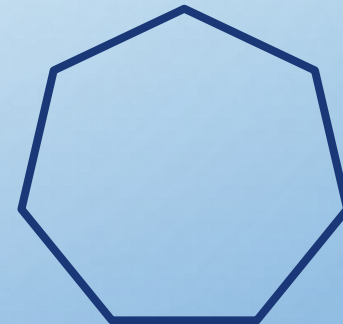
מרובע



משולש



מתומן



משובע

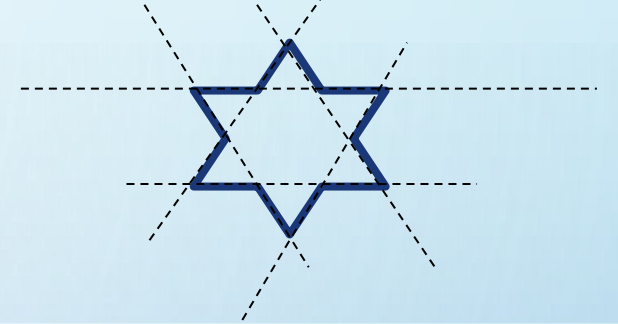


שאלות חשיבה

1. האם יכול להיות שלמצולע יש צלעות שנמצאות על ישר אחד?
2. מה היא כמות הצלעות הקטנה ביותר שיכולה להיות למצולע שיש לו זוג צלעות הנמצאות על ישר אחד?
3. הוכח שאי אפשר להעביר ישר כך שהוא יחתוך את כל הצלעות של מצולע בעל 2021 צלעות.
4. כמה אלכסונים יש למשושה, למשובע, למצולע בעל N צלעות?
5. האם קיים מצולע שי לו בדיוק 10 אלכסונים? 20 אלכסונים? 30 אלכסונים?

דין על שאלות חשיבה

1. האם יכול להיות שלמצולע יש צלעות שנמצאות על ישר אחד?

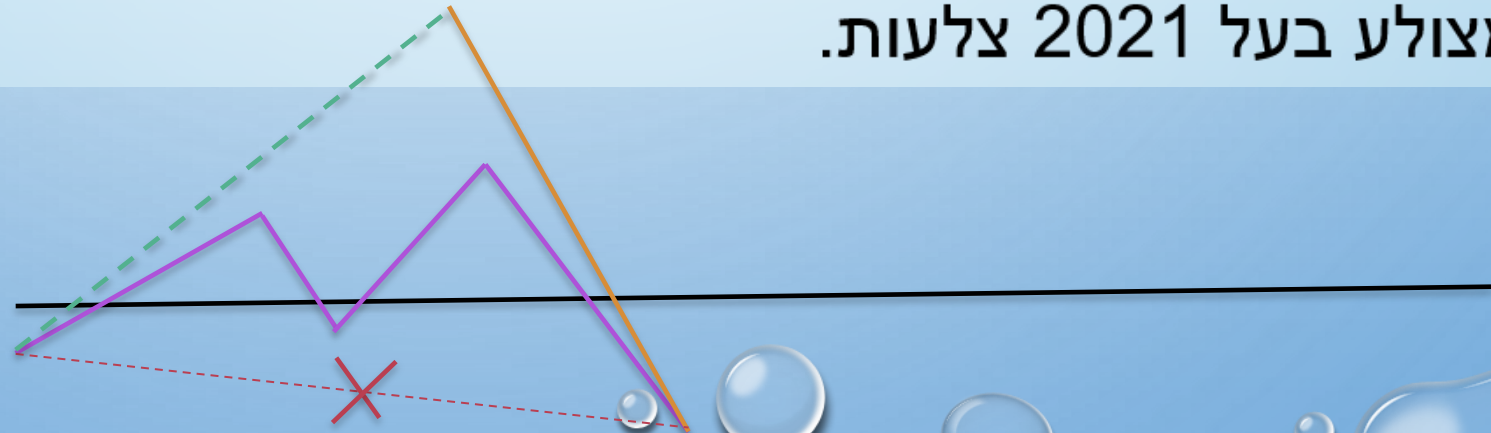


2. מה היא כמות הצלעות הקטנה ביותר שיכולה להיות למצולע שיש לו זוג צלעות הנמצאות על ישר אחד?

6

3. הוכח שאי אפשר להעביר ישר כך שהוא יחתוך את כל הצלעות של מצולע בעל 2021 צלעות.

כדי שהצלע האחרונה תחתוך את הישר הסוף וההתחלה שלה צריכים להיות משני הצדדים של הישר. לכן במות הצלעות ליפני האחרונה צריכה להיות אי זוגית. ההוספה של הצלע האחרונה הופכת כמות הצלעות לזוגית בניגוד לנתון שמצולע בעל 2021 צלעות

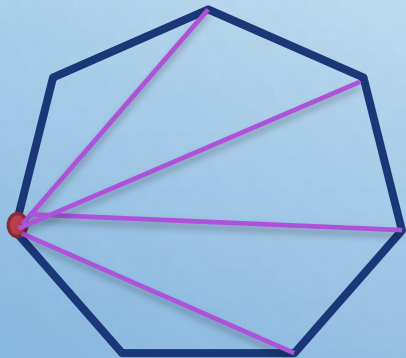


דין על שאלות חשיבה



4. כמה אלכסונים יש למשושה, למשובע, למצולע בעל N צלעות?
5. האם קיים מצולע שי לו בדיוק 10 אלכסונים? 20 אלכסונים? 30 אלכסונים?

כמות האלכסונים במצולע בעל n צלעות



לפי הגדרת האלכסון, מכל קודקוד של המצולע בעל n צלעות יוצאים $n - 3$ אלכסונים.

סה"כ יש n קודקודים. לכן הכמות הכוללת של

האלכסונים היא $\frac{n(n-3)}{2}$

משולשים

משולש – הוא מצולע בעל שלוש צלעות

מיון משולשים על פי צלעות

משולש שונה צלעות – הוא משולש
שכל הצלעות שלו שונות באורך



משולש שווה צלעות – הוא משולש
שכל הצלעות שלו שוות באורך

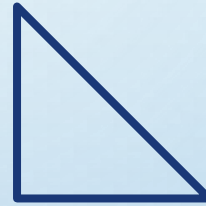


משולש שווה שוקיים – הוא משולש
בעל שתי צלעות שוות באורך



מיון משולשים על פי זוויות

משולש ישר זווית – הוא משולש בעל
זווית אחת ישרה



משולש קהה זווית – הוא משולש בעל
זווית אחת קהה



משולש חד זווית – הוא משולש שכל
הזוויות שלו חדות



קטעים מיוחדים במשולש

תיכון – הוא קטע שיוצא מקודקוד המשולש לצלע שממול וחוצה את הצלע

**משפט: למשולש יש שלושה תיכונים שכולם נמצאים בתוך המשולש
ונפגשים בנקודה אחת שנקראת מרכז הכובד של המשולש**

נוכיח בהמשך

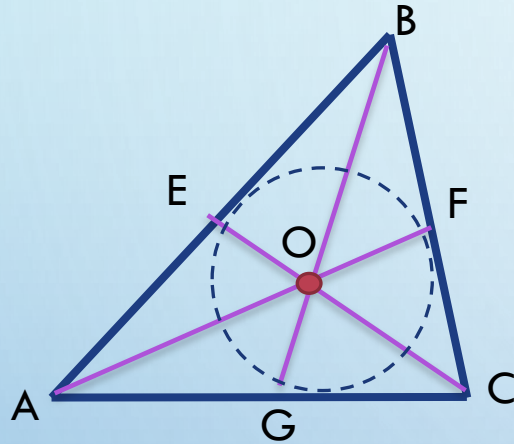
חוצה זווית – הוא קטע שיוצא מקודקוד המשולש לצלע שממול וחוצה את הזווית

**משפט: למשולש יש שלושה חוצי זוויות שכולם נמצאים בתוך המשולש
ונפגשים בנקודה אחת שהיא מרכז המעגל החסום במשולש**

נוכיח בהמשך

קטעים מיוחדים במשולש

חוצי זוויות

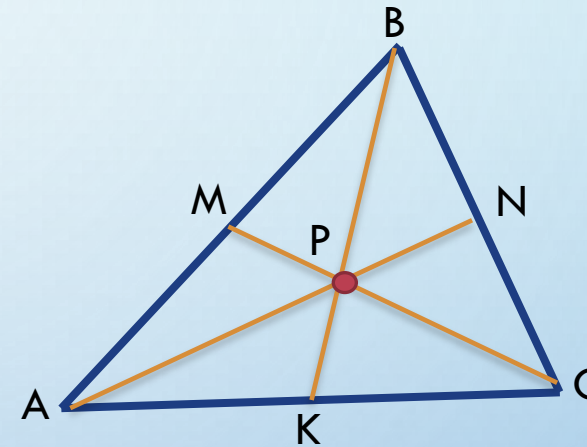


חוצי זוויות - AF, BG, CE

$$\angle BAF = \angle FAC, \angle ABG = \angle GBC, \angle BCE = \angle ECA$$

O - מרכז המעגל החסום במשולש

תיכונים



תיכונים - AN, BK, CM

$$AM = MB, BN = NC, CK = KA$$

P - מרכז הכובד

קטעים מיוחדים במשולש

גובה – הוא קטע שיוצא מקודקוד המשולש לצלע או להמשך של הצלע שממול ומאונך לו.

משפט: למשולש יש שלושה גבהים שהם או המשכיהם

נפגשים בנקודה אחת שהיא נמצאת בתוך המשולש (משולש חד זווית), מחוץ למשולש (משולש קהה זווית), בקודקוד המשולש (משולש ישר זווית).

נוכיח בהמשך

אנך אמצעי – הוא ישר שעובר דרך אמצע הצלע ומאונך לה.

משפט: שלושה אנכים האמצעים של המשולש נפגשים בנקודה אחת שהיא

נמצאת בתוך המשולש (משולש חד זווית), מחוץ למשולש (משולש קהה זווית), על אחת הצלעות של המשולש (משולש ישר זווית) והיא מרכז המעגל החוסם את המשולש. (נוכיח בהמשך)

קטעים מיוחדים במשולש

אנכים אמצעים

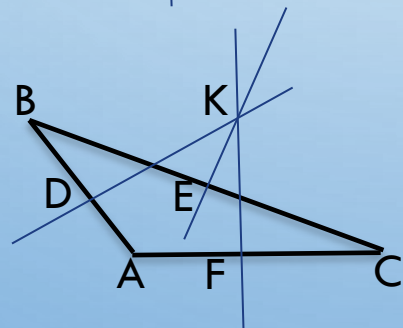
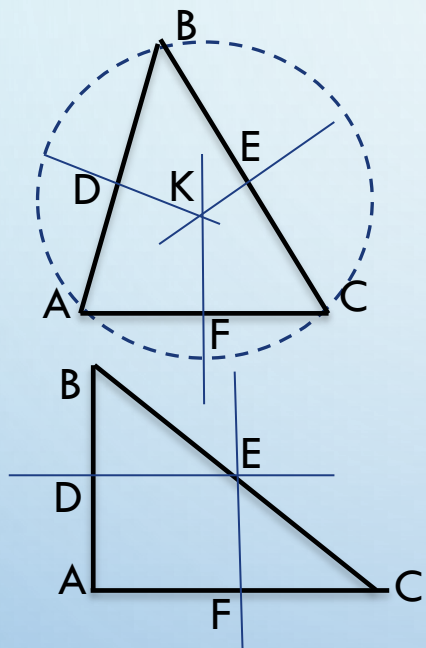
$$KE \perp BC \quad KF \perp AC \quad KD \perp AB$$

$$K = DK \cap EK \cap FK$$

$$ED \perp AB \quad EF \perp AC$$

$$AD = DB, BE = EC, CF = FA$$

$$E = DE \cap FE$$



$$KE \perp BC \quad KF \perp AC \quad KD \perp AB$$

$$AD = DB, BE = EC, CF = FA$$

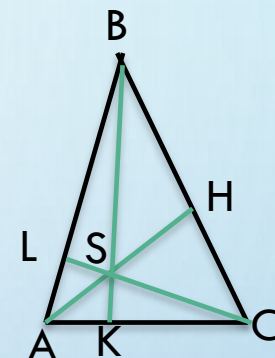
$$K = DK \cap EK \cap FK$$

גבהים

גבהים - AH, BK, CL

$$AH \perp BC \quad BK \perp AC \quad CL \perp AB$$

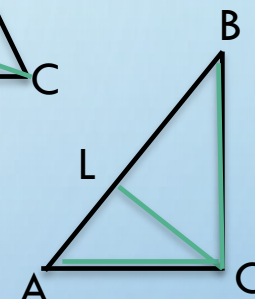
$$S = AH \cap BK \cap CL$$



גבהים - AC, BC, CL

$$AC \perp BC \quad BC \perp AC \quad CL \perp AB$$

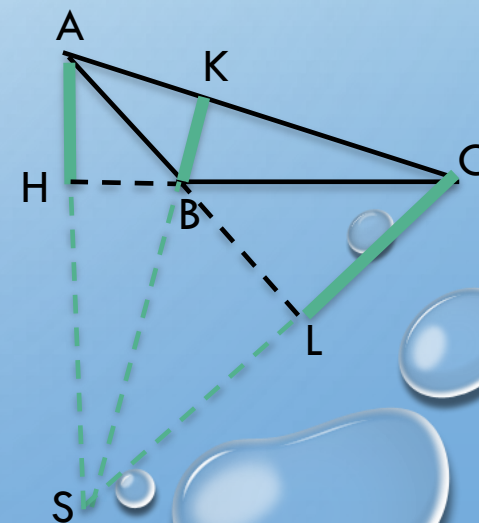
$$C = AC \cap BC \cap CL$$



גבהים - AH, BK, CL

$$AH \perp BC \quad BK \perp AC \quad CL \perp AB$$

$$S = AH \cap BK \cap CL$$





שאלות חשיבה

1. נתון משולש עם הצלעות שוות ל 3 ו 4. התיכון לצלע השלישית מחלק את המשולש לשני משולשים חדשים. מצאו הפרש ההיקפים של המשולשים החדשים.

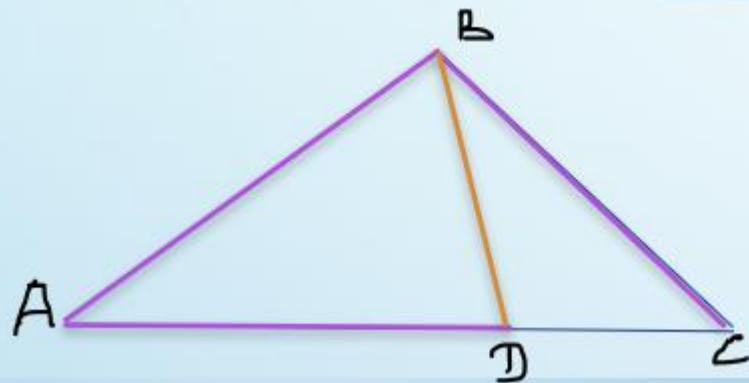
- היקף הוא סכום של כל הצלעות של המשולש.

2. האם אפשר שני משולשים שווה שוקיים ששוקיים שלהם שוות לסדר על המישור כך שאחד יהיה בתוך השני?

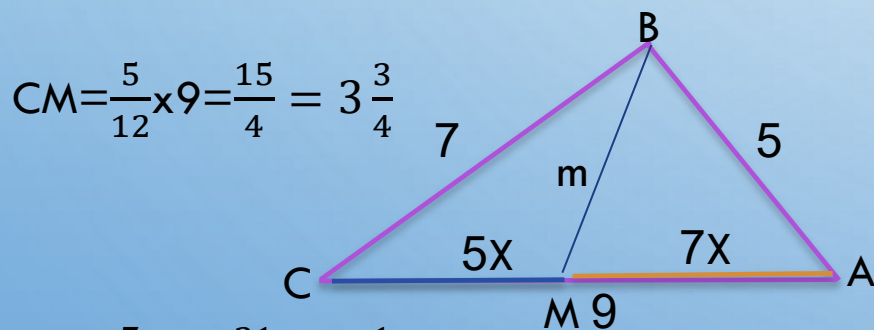
3. נתון משולש עם הצלעות $AB=5$, $BC=7$, $AC=9$. על הצלע CA לוקחים נקודה M כך ש $CM:MA=5:7$. לאיזה בין המשולשים CMB או AMB ההיקף יותר גדול ובכמה?



3. האם אפשר שני משולשים שווה שוקיים שלהם שוות לסדר על המישור
כך שאחד יהיה בתוך השני?



4. נתון משולש עם הצלעות $AB=5$, $BC=7$, $AC=9$. על הצלע CA לוקחים נקודה M כך ש
 $CM:MA=5:7$. לאיזה בין המשולשים CMB או AMB ההיקף יותר גדול ובכמה?



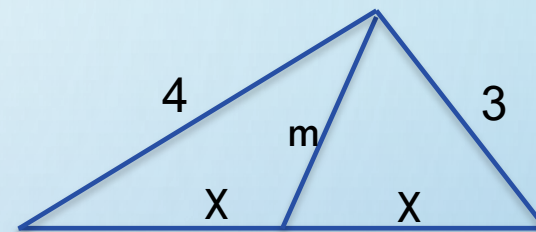
$$CM = \frac{5}{12} \times 9 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

$$AM = \frac{7}{12} \times 9 = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

$$P_1 = 7 + 3\frac{3}{4} + m = m + 10\frac{3}{4} \quad P_2 = 5 + 5\frac{1}{4} + m = m + 10\frac{1}{4}$$

דין על שאלות חשיבה

1. נתון משולש עם הצלעות שוות ל 3 ו 4. התיכון לצלע השלישית מחלק את המשולש לשני משולשים חדשים. מצאו הפרש ההיקפים של המשולשים החדשים.



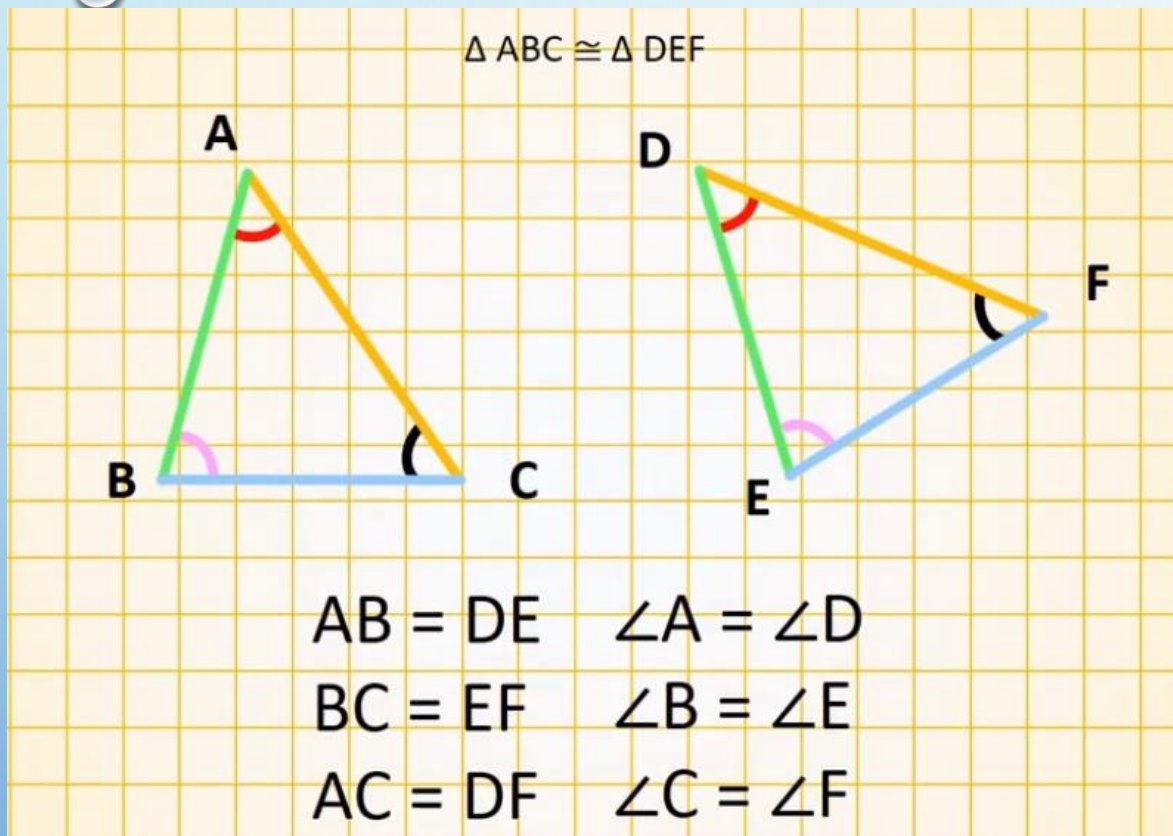
$$P_1 = 4 + X + m$$

$$P_2 = 3 + X + m$$

$$P_2 - P_1 = (4 + X + m) - (3 + X + m) = 1$$

משולשים חופפים

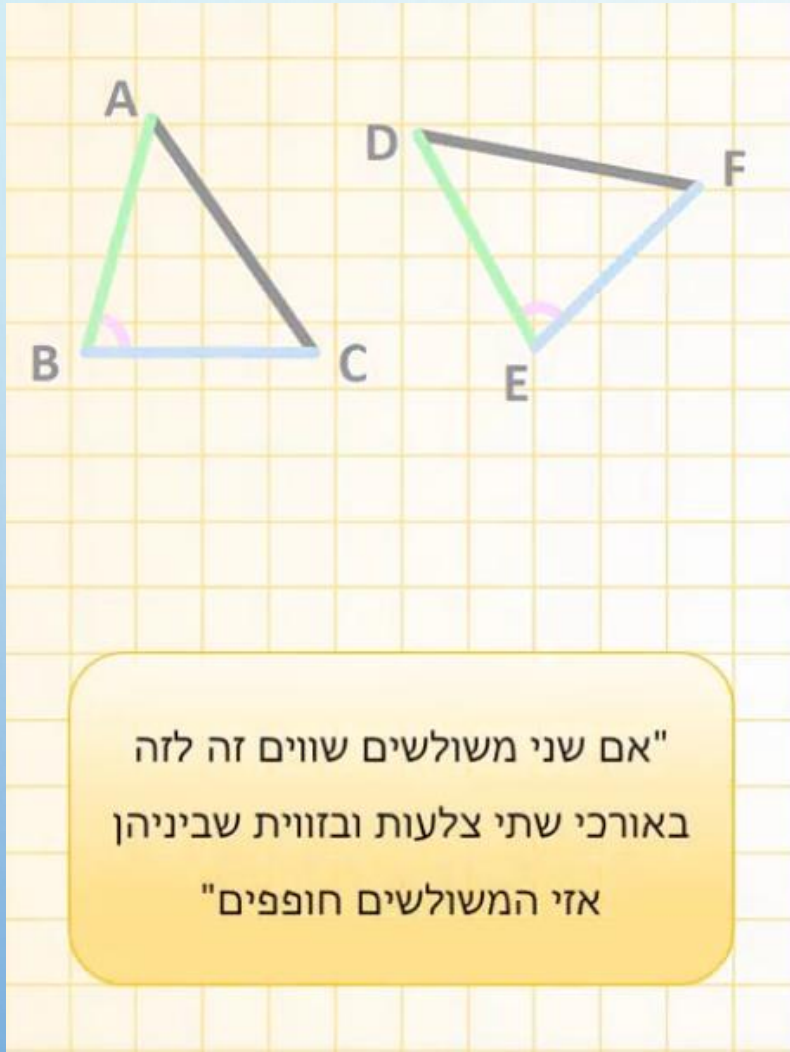
משולשים חופפים



משולשים חופפים – הם שני משולשים כאלה שכל הצלעות של משולש אחד שוות לכל הצלעות של המשולש השני וכל הזוויות של משולש אחד שוות לכל הזוויות של המשולש השני בהתאמה (זאת אומרת שמול הצלעות השוות נמצאות הזוויות השוות ולהפך מול הזוויות השוות נמצאות הצלעות השוות).

משפטי חפיפה

אקסיומת חפיפה

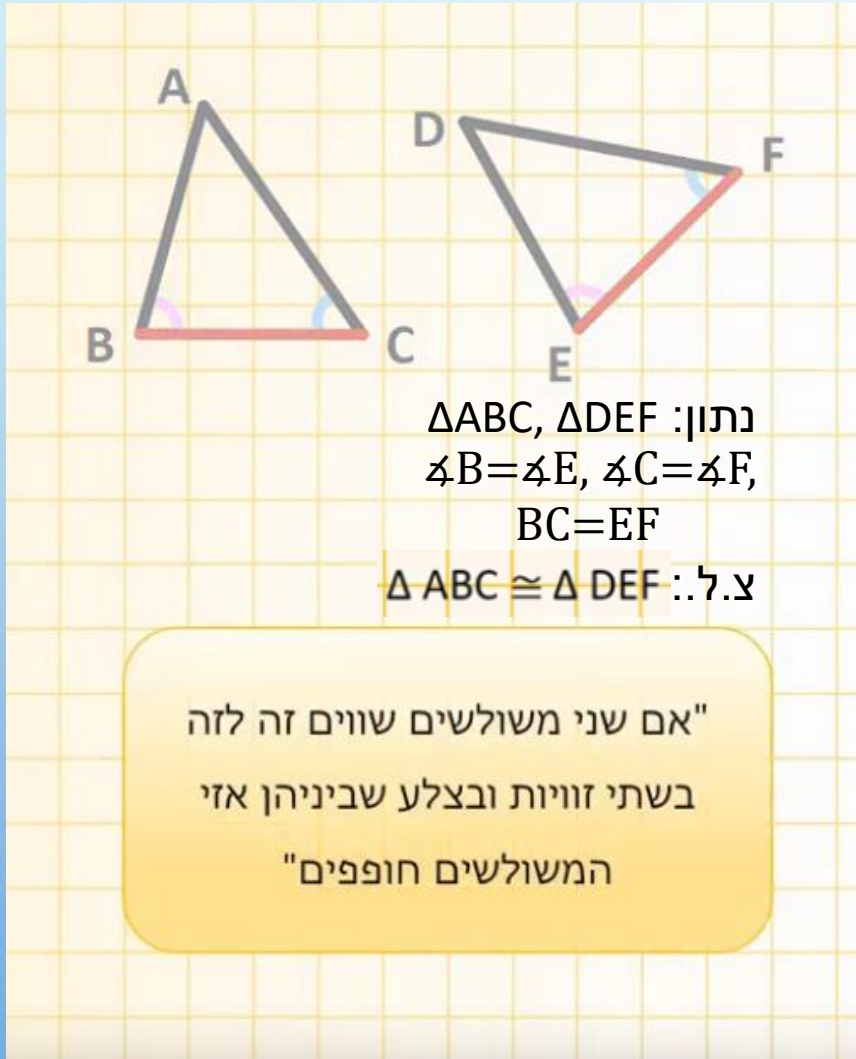


המטרה של משפטי
חפיפה: להוכיח שאם
מתקיים חלק
מדרישות ההגדרה של
המשולשים החופפים
אז גם שאר הדרישות
יתקיימו בוודאות.

משפט חפיפה הראשון צ.ז.צ

משפטי חפיפה

משפט חפיפה השני ז.צ.ז.



הוכחה בשלילה

❖ מצב דואלי הוא מצב שיש בו רק שתי אפשרויות.

❖ הוכחה בשלילה היא הוכחה שאחד

מהמצבים האלה לא יכול להתקיים

❖ המסקנה: בגלל שיש רק שני מצבים

ואחד לא יכול להתקיים אז בוודאות

מתקיים השני

❖ לצורך ההוכחה בשלילה מניחים

שמתקיים מצב הפוך ממה שצריך להוכיח

❖ משיגים מסקנות מהנחה זו עד שמגיעים

לסתירה עם אחד הנתונים של הבעיה

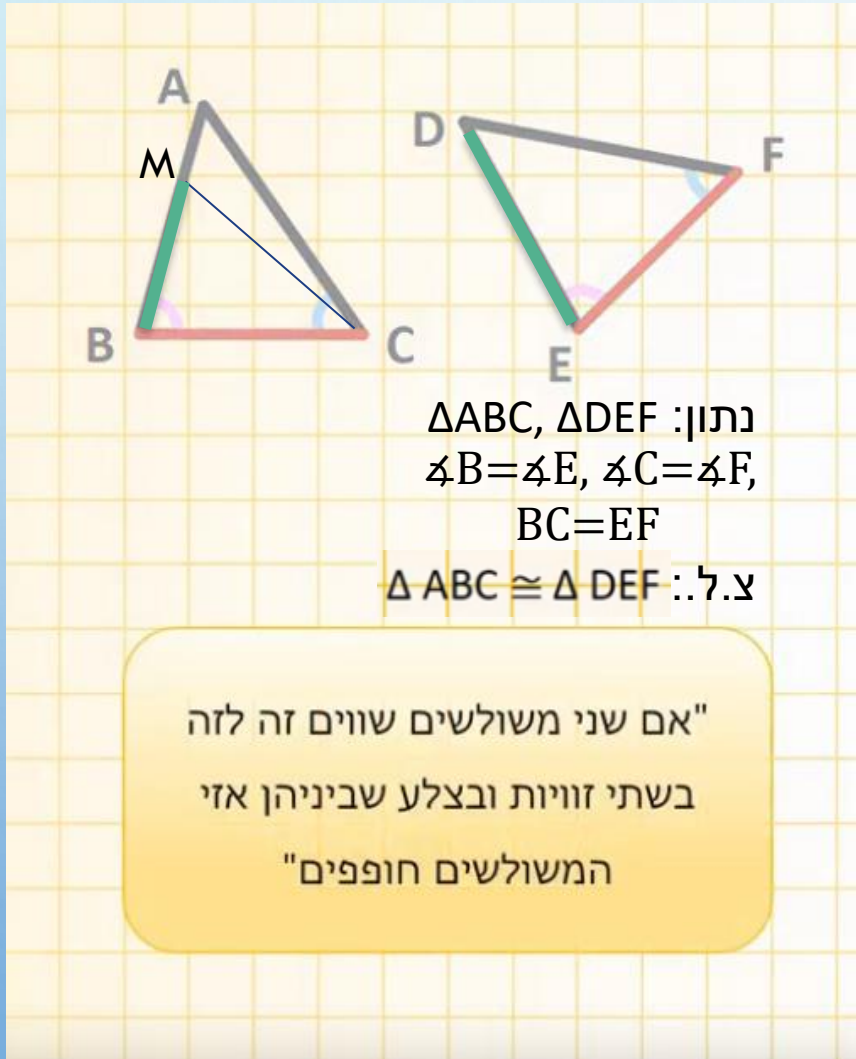
שמוכיח שההנחה לא נכונה ולכן מתקיים

מה שצריך להוכיח.

משפטי חפיפה

הוכחה

משפט חפיפה השני ז.צ.ז.



נוכיח את המשפט בשלילה.

1. נניח שכל הנתונים מתקיימים אבל המשולשים לא חופפים.

2. אם כך אז $DE \neq AB$ (אחרת המשולשים היו חופפים על פי ז.צ.ז.).

3. נניח, בלי הגבלת הכלליות, ש $DE < AB$.

4. אם כך אז בתוך הקטע AB קיימת נקודה M כך ש $DE = BM$.

5. נסמן נקודה M ונעביר קטע MC.

6. $EF = BC$, $\angle E = \angle B$, $ED = BM$ לכן

$\triangle DEF \cong \triangle MBC$ על פי ז.צ.ז.

7. $\angle BCM = \angle FED$ כי הן זוויות מתאימות במשולשים חופפים מול $DE = BM$.

8. סתירה! כי על פי הנתון $\angle BCA = \angle FED$

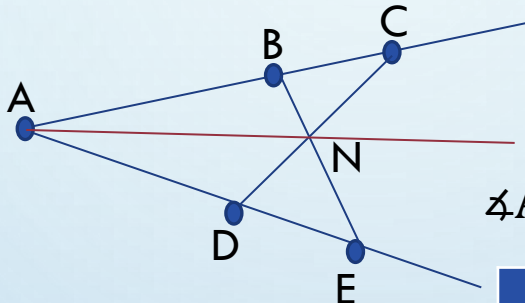
ולכן $\angle BCA = \angle BCM$ וזה בלתי אפשרי כי אחת מהן חלק מהשנייה. לכן ההנחה לא נכונה ומשולשים חופפים.

תרגול

שיעורי בית

בני גורן, עמ' 21, ת' 2, עמ' 22, ת' 5, עמ' 23, ת' 9, עמ' 25, ת' 14, עמ' 26, ת' 18, עמ' 27, ת' 23, עמ' 28, ת' 25, 28

דרך הישר, עמ' 5, ת' 7



נתון: $\angle A$
 $AB=AD, BC=DE$
 $N = CD \cap BE$
 צ.ל. : AN חוצה זווית $\angle A$

נימק	טענה	
זוויות צמודות	$\angle CBN = 180^\circ - \angle ABE$	4
זוויות צמודות	$\angle EDN = 180^\circ - \angle ADC$	5
על פי 3,5,6	$\angle CBN = \angle EDN$	6
נתון	נחפוף $\triangle DNE \mid \triangle BNC$	7
6	$\angle CBN = \angle EDN$	
נתון	$DE=BC$	
2	$\angle BCN = \angle DEN$	
ז.צ.ז.	$\triangle DNE \cong \triangle BNC$	
במשולשים חופפים מול זוויות שוות צלעות שוות, 6	$NE=CN$	8
	נחפוף $\triangle ANC \mid \triangle ANE$	9
נתון, 2, 8	$CN=NE, \angle C=\angle E, AC=AE$	
ז.צ.ז.	$\triangle ANC \cong \triangle ANE$	
במשולשים חופפים מול צלעות שוות (CN=EN) זוויות שוות	$\angle CAN = \angle EAN$	10
ע"פ ההגדרה, 10	AN חוצה זווית	11
מ.ש.ל.		

נימק	טענה	
	נחפוף $\triangle ADC \mid \triangle ABE$	1
נתון	$AB = AD$	
משותפת	$\angle A$	
נתון	$AC=AB+BC=AD+DE=AE$	
על פי ז.צ.ז.צ.	$\triangle ADC \cong \triangle ABE$	
במשולשים חופפים מול צלעות שוות (AD=AB) זוויות שוות	$\angle ACD = \angle AEB$	2
כמו 2 ($AC=AE$)	$\angle ABE = \angle ADC$	3
נתון, 8, הגדרה	$\angle AOB, \angle COD$ קודקודיות	9
	מ.ש.ל.	

גיאומטריה

מכינה 2024

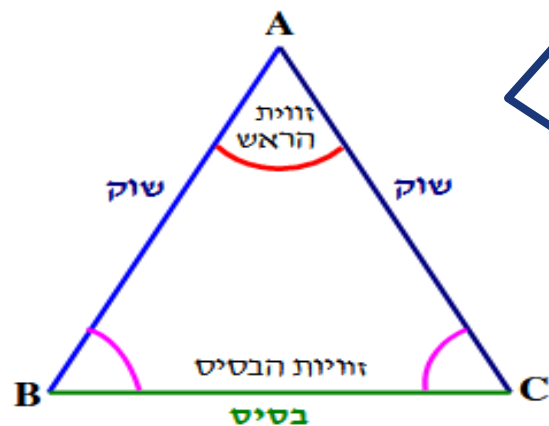
יחידה שנייה

משולש שווה שוקיים, משפטי חפיפה שלישי-חמישי, יחס
בין צלעות וזוויות במשולש

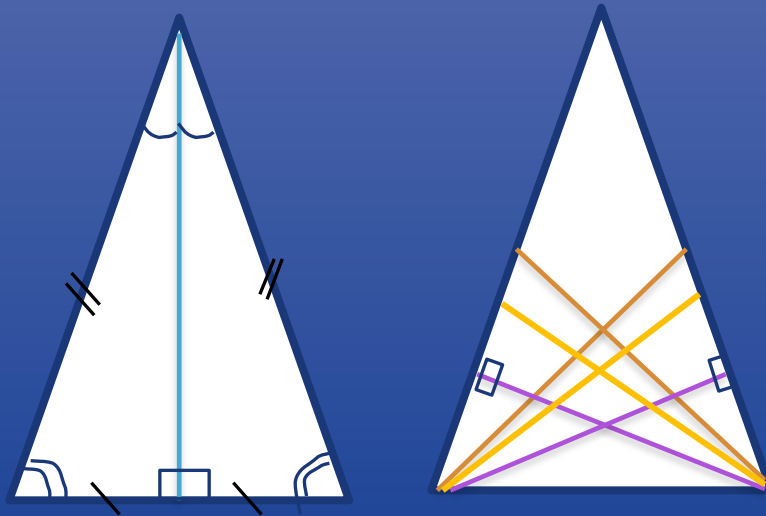
משולש שווה שוקיים

✓ הגדרה: משולש שווה שוקיים הוא משולש שבו שתי צלעות שוות זו לזו.

הצלעות השוות נקראות **שוקיים** ואילו הצלע השלישית נקראת **בסיס**. הזוויות בצידי הבסיס נקראות **זוויות הבסיס** והזווית השלישית נקראת **זווית הראש**.

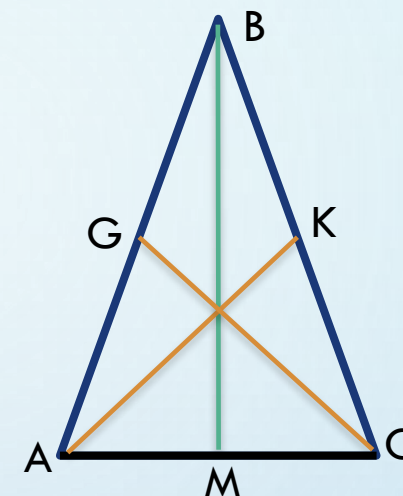


משולש שווה שוקיים



- במשולש שווה שוקיים מתקיים:
- ❖ חוצה זווית הראש הוא גם תיכון
 - ❖ חוצה זווית הראש הוא גם גובה
 - ❖ זוויות בסיס שוות זו לזו
 - ❖ הגבהים לשוקיים שווים זה לזה
 - ❖ התיכונים לשוקיים שווים זה לזה
 - ❖ חוצי זוויות בסיס שווים זה לזה

נימוק	טענה	
ז. מ. ב. ח. $(AC=AB)$, 2	$\angle BMA = \angle BMC$	5
צמודות	$\angle BMC + \angle BMA = 180^\circ$	6
5,6	$\angle BMA = \angle BMC = 90^\circ$	7
7, הגדרה	BM גובה	8
	מ.ש.ל. 2	
ז. מ. ב. ח. $(BM=BM)$, 2	$\angle A = \angle C$	9
	מ.ש.ל. 3	10
$BC=AB$, AK, CG תיכונים	$KC=BK=GB=AG$	11
	נחפוף $\triangle GAC$ ו $\triangle KCA$	12
11	$KC=GA$	
9	$\angle A = \angle C$	
צלע משותפת	$AC=AC$	
צ.ז.צ.	$\triangle GAC \cong \triangle KCA$	
צ.מ.ב.ח. $(\angle A = \angle C)$	$CG=AK$	13
	מ.ש.ל. 4	



נתון: $\triangle ABC$ ($AB=BC$)
צ.ל.:

- ✓ 1. אם BM ח"ז אז הוא תיכון
 - ✓ 2. אם BM ח"ז אז הוא גובה
 - ✓ 3. $\angle A = \angle C$
 - ✓ 4. אם AK ו CG תיכונים אז $CG=AK$
 - 5. אם AH ו CE גבהים אז $CE=AH$
 - 6. אם AP ו CQ חוצי זוויות אז $CQ=AP$
- הוכחה**

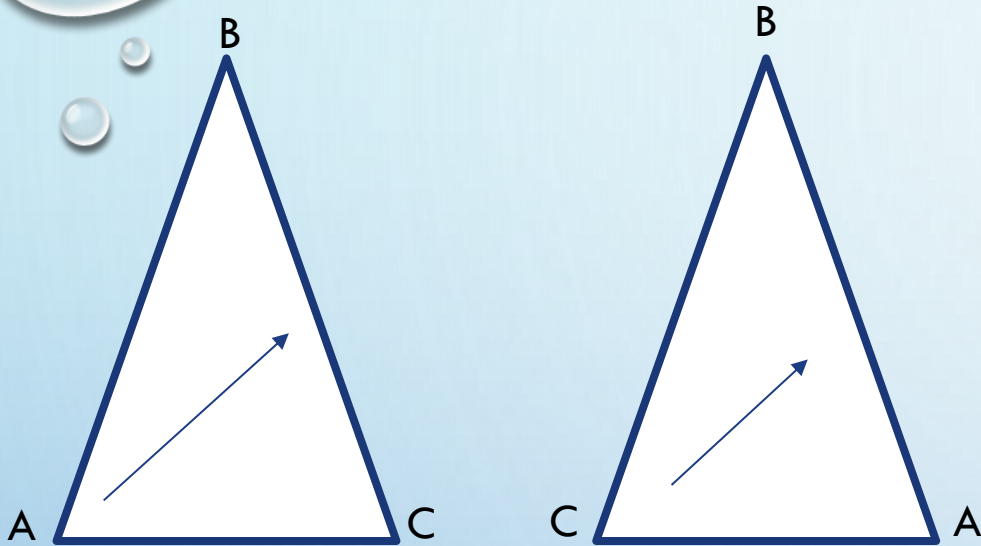
נימוק	טענה	
נתון	BM חוצה זווית	1.
	נחפוף $\triangle BMC$ ו $\triangle BMA$	2
נתון	$BC=AB$	
נתון BM ח"ז	$\angle ABM = \angle CBM$	
צלע משותפת	$BM=BM$	
צלע משותפת	$\triangle BMC \cong \triangle BMA$	
צ. מ. ב. ח. $(\angle B_1 = \angle B_2)$	$MC=AM$	3
3, הגדרה	BM תיכון	4
	מ.ש.ל. 1	

משולש שווה שוקיים. משפטים הפוכים

אם במשולש מתקיים:

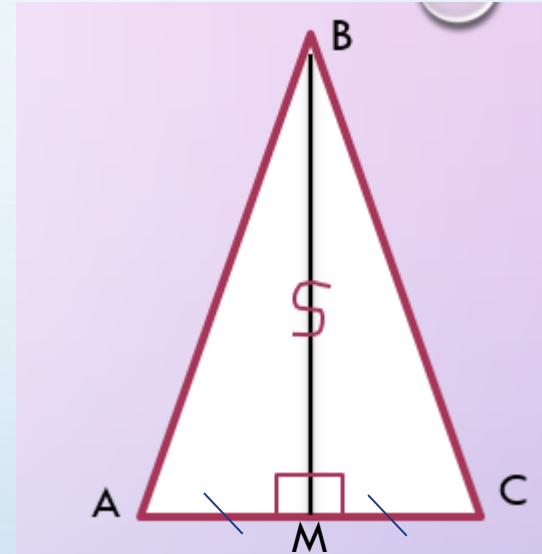
- ❖ חוצה זווית הראש הוא גם תיכון אז המשולש הוא שווה שוקיים
- ❖ חוצה זווית הראש הוא גם גובה אז המשולש הוא שווה שוקיים
- ❖ גובה הוא גם תיכון אז המשולש הוא שווה שוקיים
- ❖ זוויות בסיס שוות זו לזו אז המשולש הוא שווה שוקיים
- ❖ הגבהים לשוקיים שווים זה לזה אז המשולש הוא שווה שוקיים
- ❖ התיכונים לשוקיים שווים זה לזה אז המשולש הוא שווה שוקיים
- ❖ חוצי זוויות בסיס שווים זה לזה אז המשולש הוא שווה שוקיים

אם במשולש זוויות בסיס שוות
זו לזו אז המשולש הוא שו"ש



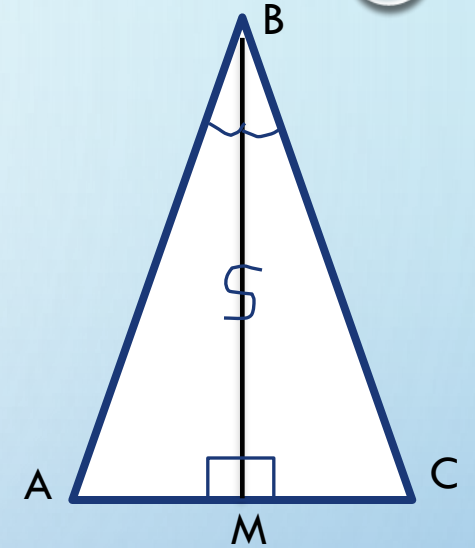
נימוק	טענה
	נחפוף $\triangle ABC$ ו $\triangle CBA$
נתון	$\angle A = \angle C$
אותו צלע	$AC = CA$
נתון	$\angle C = \angle A$
ז.צ.ז.	$\triangle ABC \cong \triangle CBA$
צ.מ.ב.ח. ($\angle A = \angle C$)	$BC = AB$

אם במשולש תיכון הוא גם
גובה אז המשולש הוא שו"ש



נימוק	טענה
	נחפוף $\triangle BMC$ ו $\triangle BMA$
נתון BM תיכון	$MC = AM$
נתון BM גובה	$\angle BMA = \angle BMC = 90^\circ$
צלע משותפת	$BM = BM$
צ.ז.צ.	$\triangle BMC \cong \triangle BMA$
צ.מ.ב.ח. ($\angle BMA = \angle BMC$)	$BC = AB$

אם במשולש חוצה זווית הראש הוא
גם גובה אז המשולש הוא שו"ש

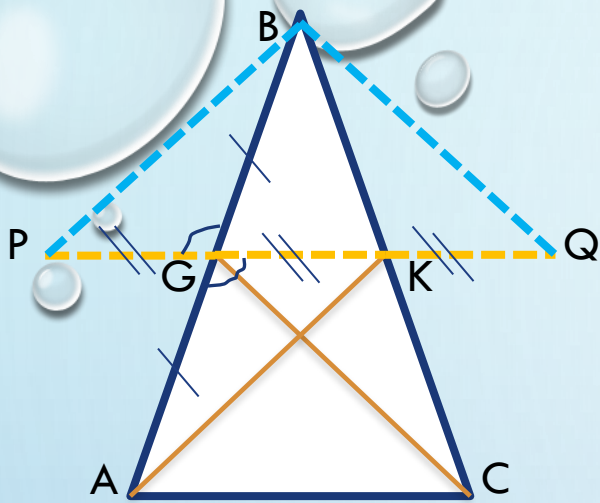


נימוק	טענה
	נחפוף $\triangle BMC$ ו $\triangle BMA$
נתון BM חוצה זווית	$\angle B_1 = \angle B_2$
צלע משותפת	$BM = BM$
נתון BM גובה	$\angle BMA = \angle BMC = 90^\circ$
ז.צ.ז.	$\triangle BMC \cong \triangle BMA$
צ.מ.ב.ח. ($\angle BMA = \angle BMC$)	$BC = AB$

משולש שווה שוקיים. משפטים הפוכים

אם במשולש תיכונים לשוקיים שווים זה לזה אז המשולש הוא שו"ש הוכחה:

1. נעשה בניית עזר: נעביר קטע GK ונמשיך אותו לשני הצדדים כך ש $KQ=GK=GP$. נעביר קטעים PB ו QB .



נימוק	טענה	
משפט: זוויות בסיס במשו"ש שוות זו לזו	$\angle Q = \angle P$	8
	נחפוף $\triangle PBG$ ו $\triangle QBK$	9
ע"פ בניית עזר	$PG = QK$	
8	$\angle P = \angle Q$	
6	$PB = BQ$	
צ.ז.צ.	$\triangle PBG \cong \triangle QBK$	
צ.מ.ב.ח. ($\angle P = \angle Q$)	$GB = BK$	10
10, נתון	$AB = 2GB = 2BK = BC$	11
11, הגדרה	שווה שוקיים $\triangle ABC$	12
	מ.ש.ל.	

נימוק	טענה	
	נחפוף $\triangle PBG$ ו $\triangle KAG$	2
נתון	$PG = GK$	
זוויות קודקודיות	$\angle PGB = \angle KGA$	
CG תיכון	$GA = BG$	
צ.ז.צ.	$\triangle PBG \cong \triangle KAG$	
צ.מ.ב.ח. ($\angle PGB = \angle KGA$)	$PB = AK$	3
כמו 2	$\triangle QBK \cong \triangle GCK$	4
($\angle BKQ = \angle CKG$ צ.מ.ב.ח.)	$CG = BQ$	5
$CG = 4$, $AK = 3$, נתון	$PB = BQ$	6
6	שווה שוקיים $\triangle PBQ$	7

תרגול

דרך הישר,

עמ' 32, ת. 7

עמ' 32, ת. 9

עמ' 32, ת. 13

עמ' 32, ת. 18

בני גורן,

עמ' 32, ת. 44,

עמ' 33, ת. 47,

עמ' 34, ת. 51

עמ' 34, ת. 52

עמ' 34, ת. 53

עמ' 35, ת. 54

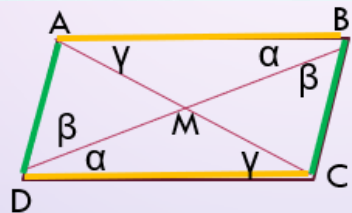
עמ' 35, ת. 55

תרגול

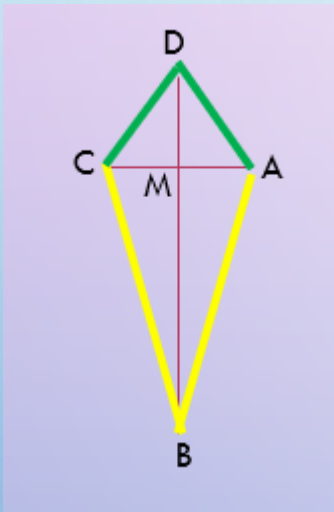
נבדיל בין שני מיקרים

דרך הישר,
עמ' 32, ת. 7

נתון:
 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$
 $M = AC \cap BD$
 צ.ל. $DM = BM$
 $AM = CM$



נתון:
 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$
 $M = AC \cap BD$
 צ.ל. $DM = BM$
 $AM = CM$



במקרה זה, הטענה לא
נכונה

נימוק	טענה	
נתון	$\triangle ABD \cong \triangle CDB$	1
צ.מ.ב.ח.	$BC = AD, DC = AB$	2
במשולשים חופפים מול צלעות שוות זוויות שוות, סימון	$\angle ABD = \angle BDC = \alpha$	3
במשולשים חופפים מול צלעות שוות זוויות שוות, סימון	$\angle ADB = \angle DBC = \beta$	4
ע"פ 3, 4	$\angle ADC = \angle ABC = \alpha + \beta$	5
צ.ז.צ., 2, 5	$\triangle ADC \cong \triangle ABC$	6
ז.מ.ב.ח. ($AD = BC$)	$\angle ACD = \angle BAC = \gamma$	7
1, 2, 3, נתון, 7	$\triangle AMB \cong \triangle CMD$	8
צ.מ.ב.ח., 3, 7, 8	$AM = CM, MB = DM$	9
	מ.ש.ל.	

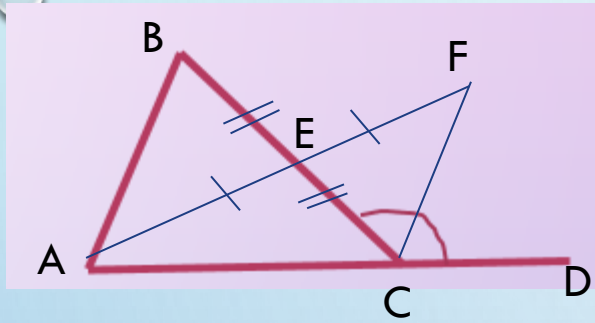
המרובע
 ABCD מורכב
 משני משולשים
 חופפים
 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$
 הוכיחו כי אלכסוני
 המרובע חוצים
 זה את זה.

היחס בין צלעות וזוויות במשולש

- ❖ זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית של המשולש
הלא צמודה לה
- ❖ במשולש מול הצלעות השוות נמצאות זוויות שוות ולהפך מול
הזוויות השוות נמצאות צלעות שוות
- ❖ במשולש מול הזווית הגדולה מבין השתיים נמצאת הצלע הגדולה
- ❖ במשולש מול הצלע הגדולה מבין השתיים נמצאת הזווית הגדולה
- ❖ סכום של שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית

היחס בין צלעות וזוויות במשולש

זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית של המשולש הלא צמודה לה



נתון: $\triangle ABC$
 חיצונית $\angle BCD$
 צ.ל.
 $\angle BCD > \angle A$
 $\angle BCD > \angle B$

הוכחה:

1. נעשה בניית עזר: נעביר תיכון AE ונמשיך אותו כך ש $EF=AE$. נעביר קטע FC.

נימוק	טענה	
	נחפוף $\triangle ABE \mid \triangle FCE$	2
AE תיכון ע"פ ב"ע	$BE=EC$	
זוויות קודקודיות	$\angle BEA = \angle CEF$	
ב"ע	$AE=EF$	
צ.ז.צ.	$\triangle ABE \cong \triangle FCE$	
ז.מ.ב.ח. ($EF=AE$)	$\angle ECF = \angle B$	3
כי היא חלק ממנה	$\angle ECF < \angle BCD$	4
3,4	$\angle B < \angle BCD$	5
כמו 1-5, בניית עזר: תיכון AC לצלע	$\angle A < \angle BCD$	6
	מ.ש.ל.	



הגדרה: זווית חיצונית למשולש היא זווית צמודה לאחת הזוויות הפנימיות שלו.

למשולש יש 6 זוויות חיצוניות: שתיים ליד כל אחד מהקודקודים



1.

קבעו אם הטענות נכונות. הסבירו.

- א. אם במשולש יש זווית חיצונית אחת קהה, אז המשולש חד זווית.
- ב. אם במשולש יש שתי זוויות חיצוניות קהות, אז המשולש חד זווית.
- ג. אם במשולש יש שלוש זוויות חיצוניות קהות, אז המשולש חד זווית.

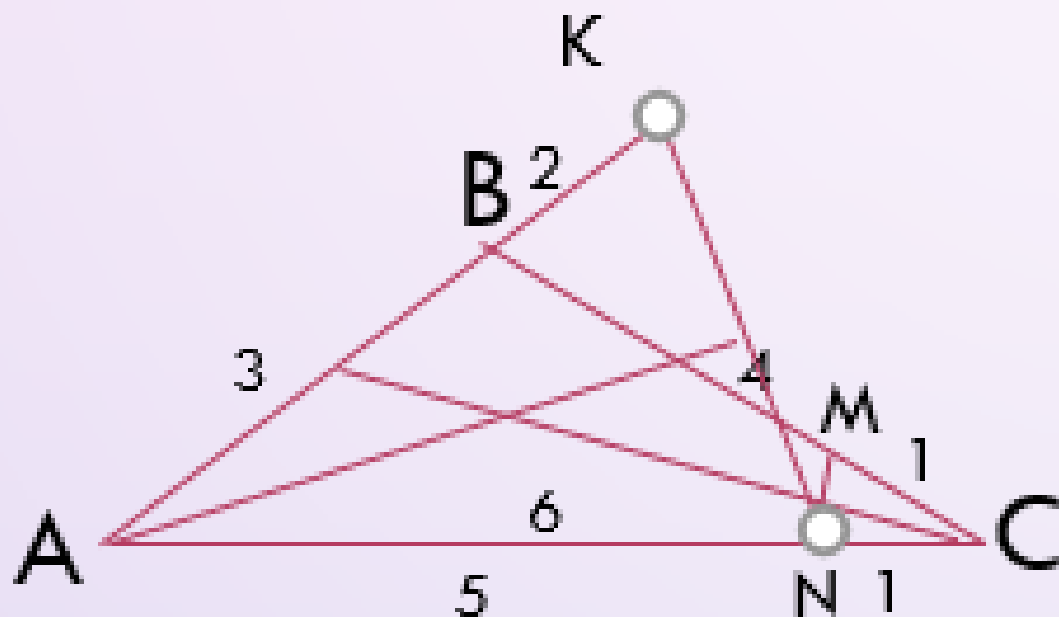
2. במשולש $\triangle ABC$ נתון $CA=6, BC=4, AB=3$. על הצלע BC לוקחים נקודה M כך ש $CM=1$. ישר שעובר דרך נקודה M ומאונך לחוצה זווית $\sphericalangle BCA$ חותך את AC בנקודה N . ישר שעובר דרך נקודה N ומאונך לחוצה זווית $\sphericalangle BAC$ חותך את AB בנקודה K . מצאו את BK ואת AK .

3. הוכיחו כי אם נמשיך צלע במשולש לשני הכיוונים, סכום שתי הזוויות החיצוניות שיוצרו יהיה גדול מי 180° (דרך הישר ת' 23)

4. אורכי צלעות של המשולש הם שלושה מספרים טבעיים עוקבים. אחד התיכונים שלו מאונך לאחד מי חוצי הזוויות. מצאו את צלעות המשולש.

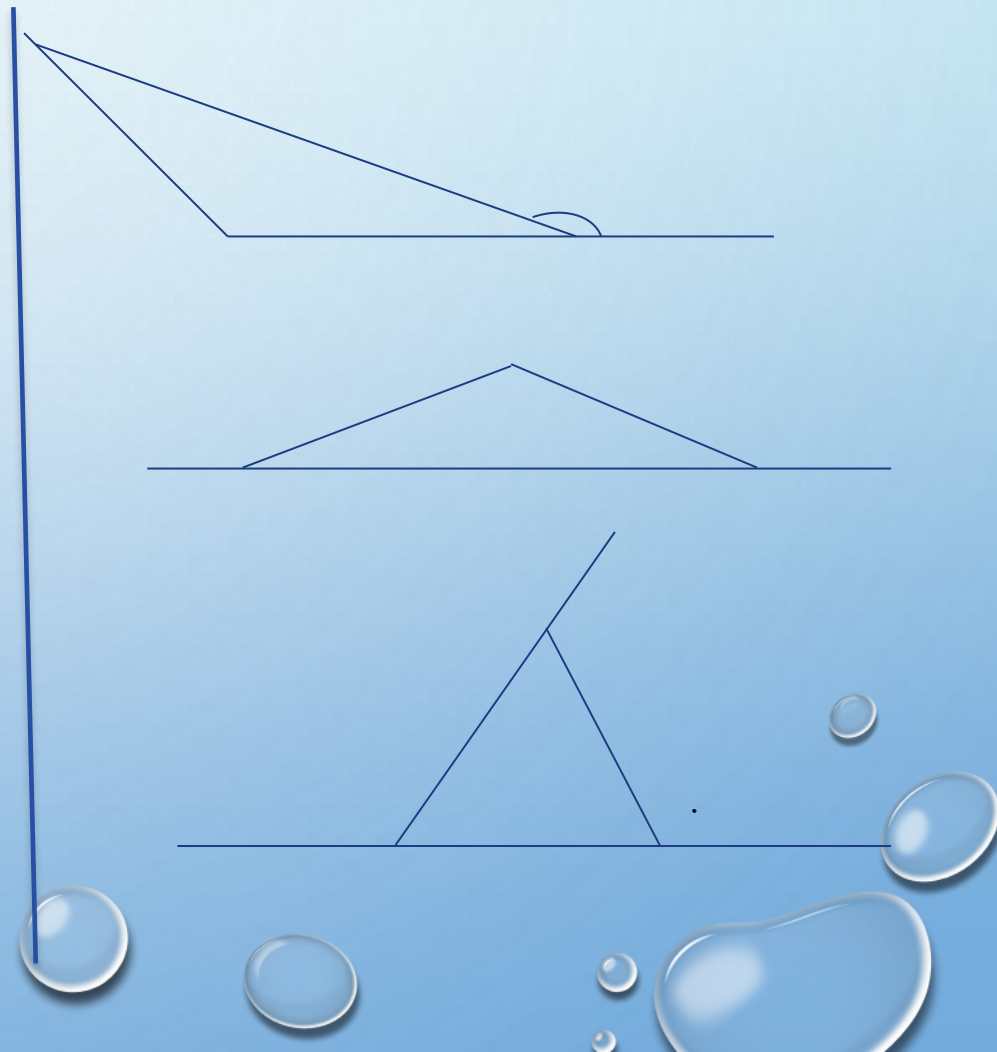


במשולש $\triangle ABC$ נתון $CA=6, BC=4, AB=3$. על הצלע BC לוקחים נקודה M כך ש $CM=1$. ישר שעובר דרך נקודה M ומאונך לחוצה זווית $\angle BCA$ חותך את AC בנקודה N . ישר שעובר דרך נקודה N ומאונך לחוצה זווית $\angle BAC$ חותך את AB בנקודה K . מצאו את BK ואת AK .



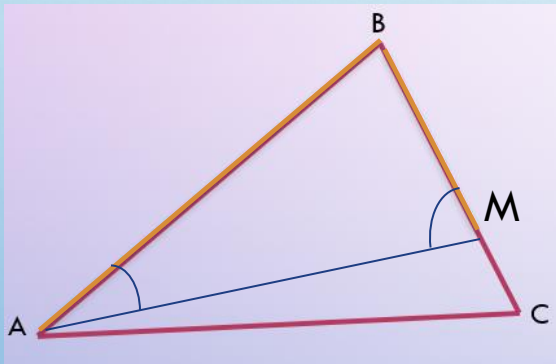
קבעו אם הטענות נכונות. הסבירו.

- א. אם במשולש יש זווית חיצונית אחת קהה, אז המשולש חד זווית.
- ב. אם במשולש יש שתי זוויות חיצוניות קהות, אז המשולש חד זווית.
- ג. אם במשולש יש שלוש זוויות חיצוניות קהות, אז המשולש חד זווית.



היחס בין צלעות וזוויות במשולש

❖ במשולש מול הזווית הגדולה מבין השתיים נמצאת הצלע הגדולה מבין השתיים



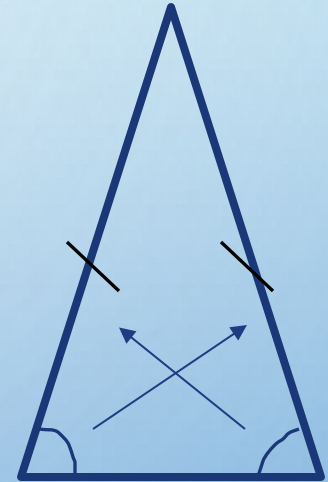
נתון: $\triangle ABC$
 $\angle C > \angle A$
צ.ל.
 $AB > BC$

הוכחה

נכיח את המשפט בשלילה.

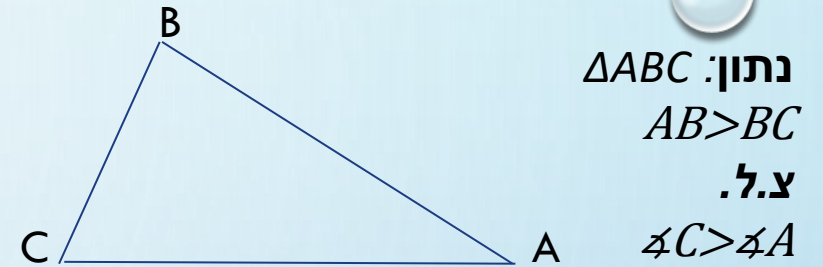
1. נניח $AB \leq BC$
2. אם כך אז יש שתי אפשרויות: $BC = AB$ או $BC > AB$
3. אם $BC = AB$ אז על פי המשפט: במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות, צריך להתקיים $\angle A = \angle C$ בניגוד לנתון. לכן $BC \neq AB$
4. אם $BC > AB$ אז בתוך הקטע BC קיימת נקודה M כך ש $AB = BM$.
5. נסמן נקודה M ונעביר קטע AM.
6. $AB = BM$, לכן $\angle BAM = \angle BMA$ על פי המשפט: במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות
7. $\angle BMA > \angle C$ כי היא זווית חיצונית למשולש $\triangle AMC$ ולכן על פי המשפט גדולה מכל זווית הפנימית שלו
8. $\angle BAM < \angle A$ כי היא חלק ממנה
9. $\angle C < \angle A$ על פי 6, 7, 8
10. סתירה! כי על פי הנתון $\angle C > \angle A$
לכן ההנחה לא נכונה ו $AB > BC$
מ.ש.ל.

❖ במשולש מול הצלעות השוות נמצאות זוויות שוות ולהפך מול הזוויות השוות נמצאות צלעות שוות



הוכחה: הטענה נובעת מתכונות המשולש שווה שוקיים

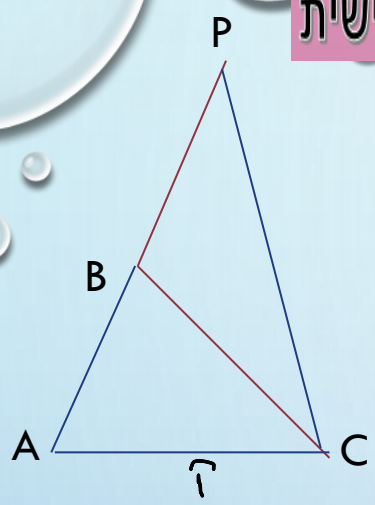
❖ במשולש מול הצלע הגדולה מבין השתיים נמצאת הזווית הגדולה



הוכחה

נוכיח את המשפט בשלילה.
 1. נניח $\angle C \leq \angle A$
 2. אם כך אז יש שתי אפשרויות: $\angle A = \angle C$ או $\angle A > \angle C$
 3. אם $\angle A = \angle C$ אז על פי המשפט: במשולש מול זוויות שוות צלעות שוות, צריך להתקיים $BC = AB$ בניגוד לנתון. לכן $\angle A \neq \angle C$
 4. אם $\angle A > \angle C$ אז על פי המשפט: במשולש מול זווית הגדולה מבין השתיים נמצאת הצלע הגדולה מבין השתיים מתקיים $AB < BC$ בניגוד לנתון.
 על פי הטענות 3 ו 4 ההנחה לא נכונה ו $\angle C > \angle A$
 מ.ש.ל.

❖ סכום של שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית



הוכחה:
 1. נעשה בניית עזר: נמשיך את הקטע AB כך ש $BC = BP$. נעביר קטע PC

נימוק	טענה	
1, משפט: במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות	$\angle P = \angle BCP$	2
חלק קטן משלם	$\angle PCB < \angle PCA$	3
2,4	$\angle P < \angle PCA$	4
משפט: במשולש מול הזווית הגדולה הצלע הגדולה	$AP > AC$	5
1	$AP = AB + BP = AB + BC$	6
	$AB + BC > AC$	7
	מ.ש.ל.	

שאלות חשיבה



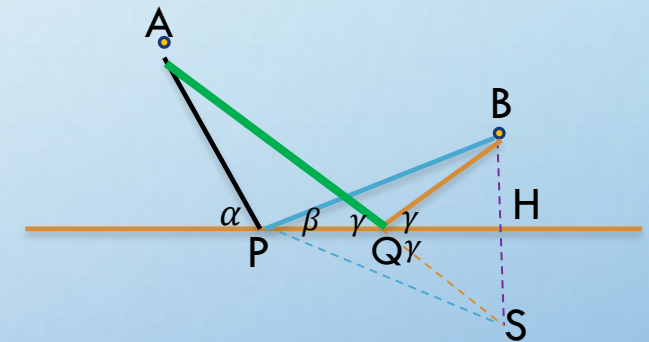
1. שני בתים A ו B נמצאים מצדו האחד של נהר, הזורם בקו ישר. אדם רוצה לצאת מ-A, ללכת בקו ישר לגדת הנהר, ולהמשיך לנקודה B. הוכיחו כי הדרך הקצרה ביותר למסע זה היא כאשר האדם יורד ועולה מהנהר באותה זווית ביחס לנהר.

2. במשולש $\triangle ABC$ נתון: $CA=7, BC=6, AB=5$. על הצלעות CA ו BC, AB לוקחים נקודות L, K , ו M בהתאמה כך ש KL מאונך לחוצה זווית ABC , LM מאונך לחוצה זווית BCA ו MK מאונך לחוצה זווית CAB . לאילו קטעים הנקודות L, K ו M מחלקות את צלעות המשולש?

3. X, Y, Z שלושה מספרים חיוביים. הוכיחו שקיים משולש עם הצלעות שוות $a=x+y, b=y+z, c=z+x$

דיון על שאלות החשיבה

1. שני בתיים A ו B נמצאים מצדו האחד של נהר, הזורם בקו ישר. אדם רוצה לצאת מ-A, ללכת בקו ישר לגדת הנהר, ולהמשיך לנקודה B. הוכיחו כי הדרך הקצרה ביותר למסע זה היא כאשר האדם יורד ועולה מהנהר באותה זווית ביחס לנהר.



נתון: $\alpha \neq \beta$
צ.ל.:

$$AQ + QB < AP + PB$$

הוכחה:

1. נמשיך את AQ לאורך הקטע BQ כך ש $BQ = QS$.

2. נעביר קטע BS

3. $\triangle BQS$ שווה שוקיים ע"פ 1

3. $\angle HQS = \angle PQA = \gamma$ – זוויות קודקודיות, נתון

4. $\angle BQH = \gamma$ - נתון

5. $\angle HQS = \angle BQH$ על פי 4,5

6. QH חוצה זווית ב $\triangle BQS$

8. $QH \perp BS$ ע"פ 3,6, משפט במשו"ש חוצה זווית הראש הוא גם גובה

9. $HS = BH$ ע"פ 3,6, משפט: במשו"ש חוצה זווית הראש הוא גם תיכון

10. PH גובה ותיכון ב $\triangle BPS$ על פי 8,9

11. $\triangle BPS$ שו"ש על פי המשפט: אם במשולש תיכון וחוצה זווית

מתלכדים אז הוא שווה שוקיים

12. $PS = BP$ על פי 11

13. $AP + PS > AS$ על פי המשפט: במשולש ($\triangle APS$) סכום שתי צלעות גדול מהצלע השלישית

14. $AP + PB > AQ + QS = AQ + QB$ על פי 1,12,13

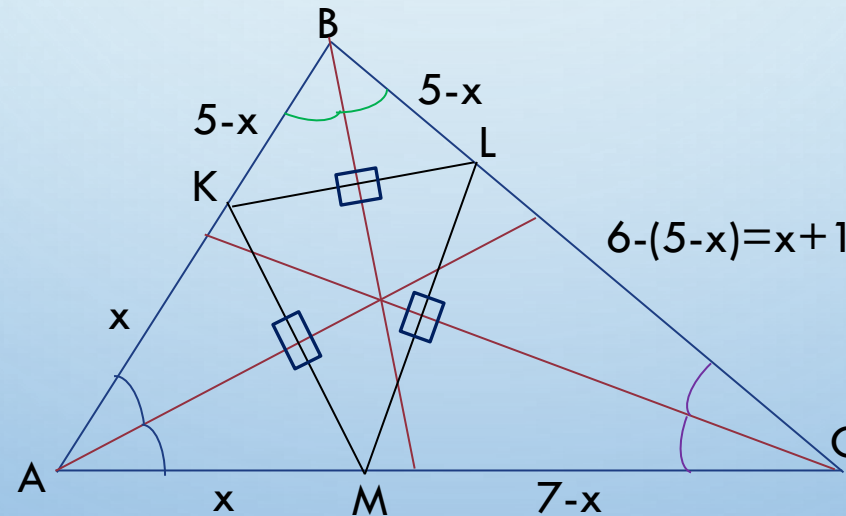
מ.ש.ל



דיון על שאלות החשיבה

2. במשולש $\triangle ABC$ נתון: $CA=7, BC=6, AB=5$. על הצלעות BC, AB ו CA לוקחים נקודות L, K ו M בהתאמה כך ש KL מאונך לחוצה זווית ABC , LM מאונך לחוצה זווית BCA ו MK מאונך לחוצה זווית CAB . לאילו קטעים הנקודות L, K ו M מחלקות את הצלעות המשולש?

משפט: אם במשולש חוצה זווית הוא גם גובה אז המשולש שווה שוקיים



$$7-x=x+1$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

$$AK=AM=3, BK=BL=2, LC=MC=4$$

דיון על שאלות החשיבה

3. X, Y, Z שלושה מספרים חיוביים. הוכיחו שקיים משולש עם

הצלעות שוות $a=x+y, b=y+z, c=z+x$

תנאי לקיום המשולש:

$$a+b>c$$

$$b+c>a$$

$$c+a>b$$



$$x+y+y+z>z+x$$

$$y+z+z+x>x+y$$

$$z+x+x+y>y+z$$



$$y+y>0$$

$$z+z>0$$

$$x+x>0$$



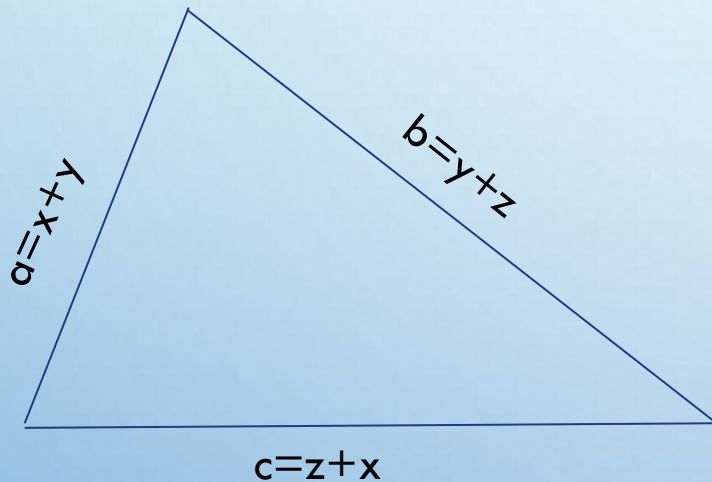
$$2y>0$$

$$2z>0$$

$$2x>0$$

לכן עבור כל שלושה מספרים חיוביים
 a, b, c אפשר לבנות משולש עם הצלעות:
 $a=x+y, b=y+z, c=z+x$

לדוגמא: אם נתונים שלוש מספרים
חיוביים: $x=2, y=6, z=5$
אפשר לבנות משולש (קיים משולש)
עם הצלעות $a=8, b=11, c=7$

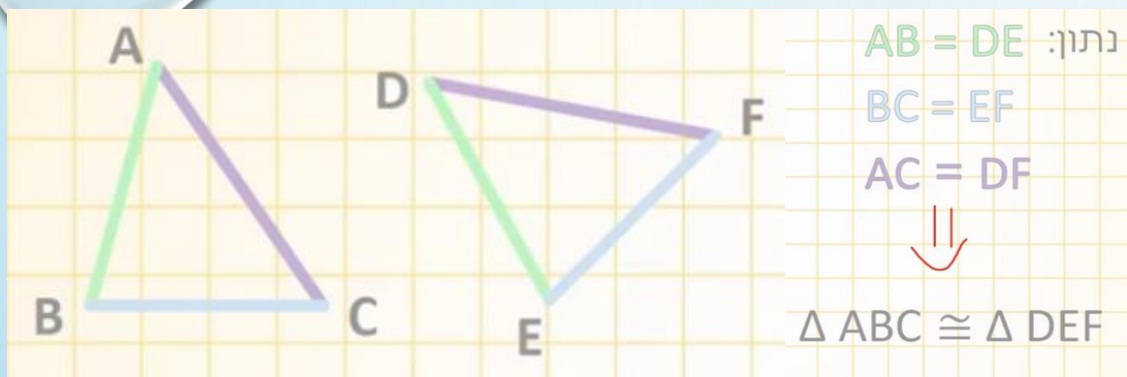


תרגול

עמ' 44, ת. 23
עמ' 44, ת. 26
עמ' 45, ת. 27
עמ' 45, ת. 28
עמ, 45, ת. 29
עמ' 45, ת. 30
עמ' 46, ת. 32

בני גורן,
עמ' 39, ת. 4,
עמ' 39, ת. 5,
עמ' 39, ת. 6
עמ' 40, ת. 7
עמ' 41, ת. 11
עמ' 42, ת. 15
עמ' 42, ת. 18
עמ' 43, ת. 20

משפט חפיפה השלישי



"אם שני משולשים שווים זה לזה
 בשלושת אורכי צלעותיהם אזי
 המשולשים חופפים"

נתון:

$$BC = EF, AC = DF, AB = DE$$

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \text{ צ"ל:}$$

הוכחה

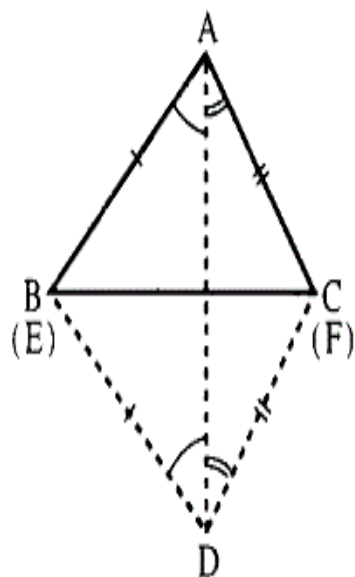
נבנה את המשולש ΔDEC מתחת למשולש ΔABC כך שהקודקוד E יתלכד עם הקודקוד B והקודקוד F יתלכד עם הקודקוד C, כלומר הצלע EF תתלכד עם הצלע BC. (הדבר אפשרי כי $BC = EF$).

נחבר את A עם D ונניח שהקטע AD עובר בתוך המרובע ABCD. (אם הקטע AD עובר דרך B או C או מחוץ למרובע ההוכחה דומה).

המשולש ABD הוא שווה שוקיים ($DE = DB = AB$ לפי הנתון),
 לכן $\angle BAD = \angle BDA$. באופן דומה המשולש ΔACD גם הוא שווה שוקיים ($DC = AC$)
 ולכן $\angle CAD = \angle CDA$

בעזרת חיבור זוויות נקבל $\angle BAC = \angle BDC$.
 עכשיו נחפוף את המשולשים ABC ו-DBC לפי משפט חפיפה ראשון.
 כלומר קיבלנו שמשולש ABC חופף למשולש DBC שזהו המשולש DEF.

מש"ל.



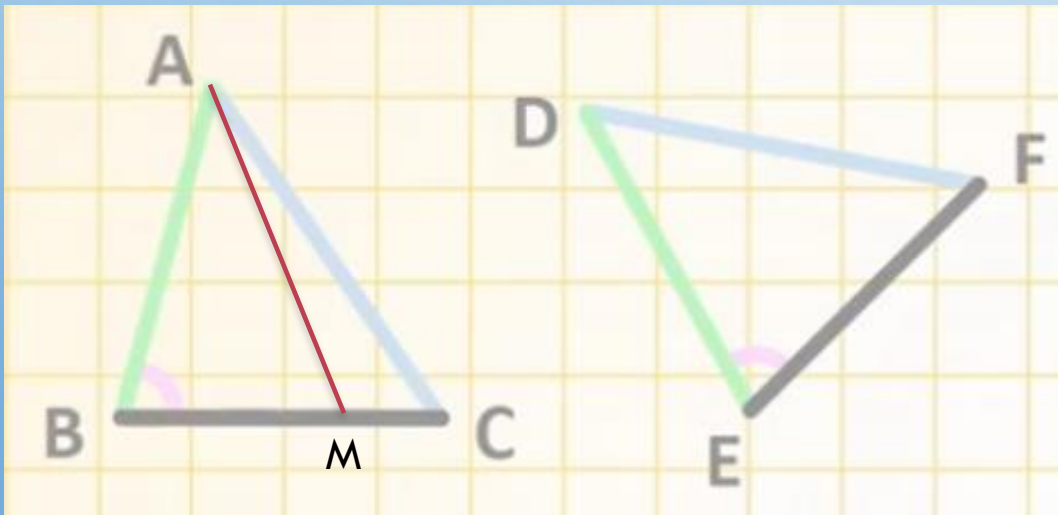
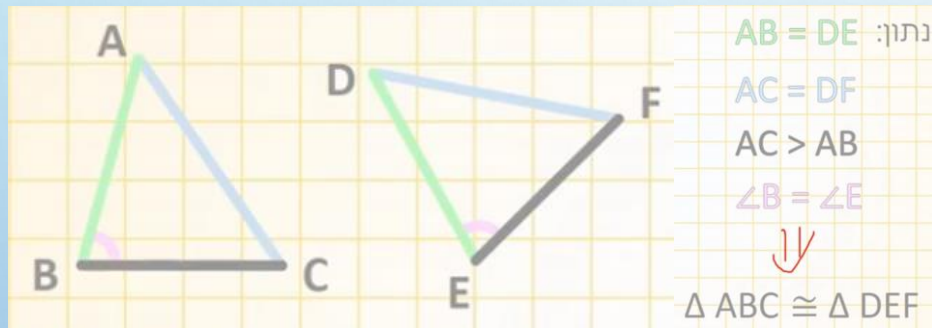
בניית עזר להוכחת משפט חפיפה שלישי



1. הוכיחו חפיפה של שני משולשים על פי שתי צלעות והתיכון לצלע השלישית.
2. הוכיחו חפיפת משולשים על פי תיכון ושתי זוויות שלידו שלהן התיכון מחלק את זווית המשולש שהוא יוצא ממנה.
3. כל אחת מנקודות X ו Y נמצאת במרחקים שווים מקצוות של הקטע AB . איזו מהטענות הבאות לא נכונה:
 - א. הישרים XY ו AB מאונכים זה לזה
 - ב. $\angle XAY = \angle XBY$
 - ג. $\angle AXB = \angle AYB$
 - ד. $\angle AXY = \angle BXY$
4. איזו מהטענות הבאות לא נכונה:
 - א. אם גובה מחלק את הצלע לשני חלקים שווים אז משולש שווה שוקיים
 - ב. אם תיכון וחוצה זווית שיוצאים מאותו קודקוד לא מתלכדים אז המשולש שונה צלעות
 - ג. אם משולש הוא שווה צלעות אז כל אחד מהגבהים שלו שווה לכל אחד מחוצי הזוויות
 - ד. אם שתי זוויות של המשולש שווים זה לזה אז חוצה זווית שלישית מחלק את הצלע לחלקים שווים.

משפט חפיפה הרביעי

"אם שני משולשים שווים זה לזה
באורכי שתי צלעות ובזווית שמול
הצלע הגדולה מביניהן אזי
המשולשים חופפים"



נוכיח את המשפט בשלילה.

1. נניח שמשולשים לא חופפים.

2. אם כך אז $BC \neq EF$ (אחרת המשולשים היו חופפים על פי צ.צ.צ.).

3. נניח, בלי הגבלת הכלליות, ש $EF < BC$.

4. אם כך אז בתוך הקטע BC קיימת נקודה M כך ש $EF = BM$.

5. נסמן נקודה M ונעביר קטע MA.

6. $AB = DE$, $\angle B = \angle E$, $EF = BM$ לכן

$\triangle DEF \cong \triangle ABM$ על פי צ.ז.צ.

7. $DF = AM$ כי צ.מ.ב.ח ($\angle B = \angle E$)

8. $AC = DF$ על פי הנתון

9. $AM = AC$ על פי 7,8

10. $\angle AMC = \angle C$ על פי המשפט: במשולש ($\triangle AMC$) מול זוויות שוות צלעות שוות

11. $\angle AMC > \angle B$ על פי המשפט: זווית חיצונית למשולש ($\triangle ABM$)

גדולה מכל זווית פנימית הלא צמודה לה

12. $\angle B > \angle C$ על פי 10, 11

13. $AB > AC$ על פי המשפט: במשולש ($\triangle ABC$) מול הזווית הגדולה הצלע הגדולה

סתירה! כי על פי הנתון $AB < AC$

לכן ההנחה לא נכונה ומשולשים חופפים.

משפט חפיפה החמישי

משפט: אם שני משולשים שווים זה לזה באורכי של שתי זוויות וצלע שלא ביניהן אז משולשים חופפים

הוכחה

נוכיח את המשפט בשלילה.

1. נניח שמשולשים לא חופפים.

2. אם כך אז $AB \neq DE$ (אחרת המשולשים היו חופפים על פי צ.ז.צ.).

3. נניח, בלי הגבלת הכלליות, ש $DE < AB$.

4. אם כך אז בתוך הקטע AB קיימת נקודה M כך ש $AM = DE$.

5. נסמן נקודה M ונעביר קטע MC .

6. $AM = DE$, $\angle A = \angle D$, $AC = DF$ לכן

$\triangle DEF \cong \triangle AMC$ על פי צ.ז.צ.

7. $\angle AMC = \angle DEF$ כי ז.מ.ב.ח ($DF = AC$)

8. $\angle B = \angle DEF$ על פי הנתון

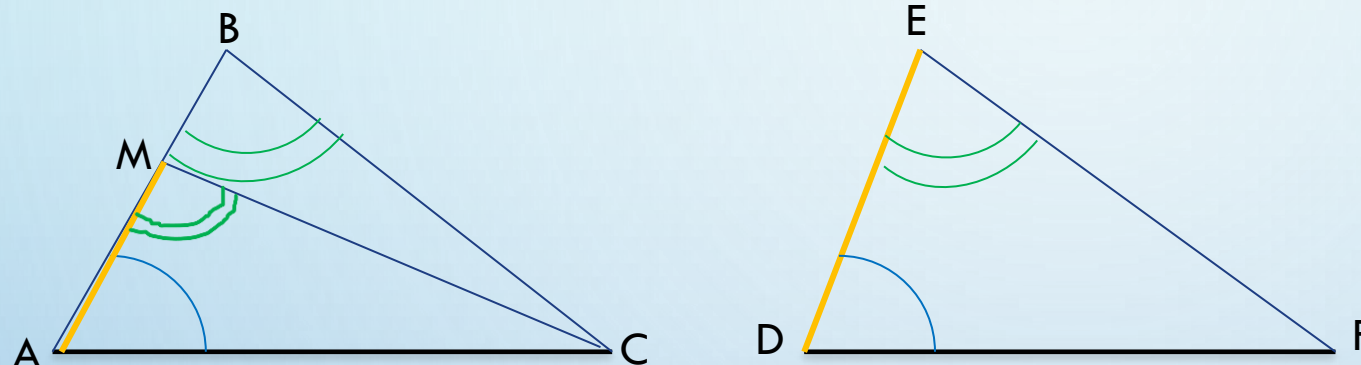
9. $\angle B = \angle AMC$ על פי 7,8

10. $\angle AMC > \angle B$ על פי המשפט: זווית חיצונית למשולש

($\triangle MBC$) גדולה מכל זווית פנימית הלא צמודה לה

סתירה בין 9 ו 10

לכן ההנחה לא נכונה ומשולשים חופפים.



נתון:

$\triangle ABC, \triangle DEF$

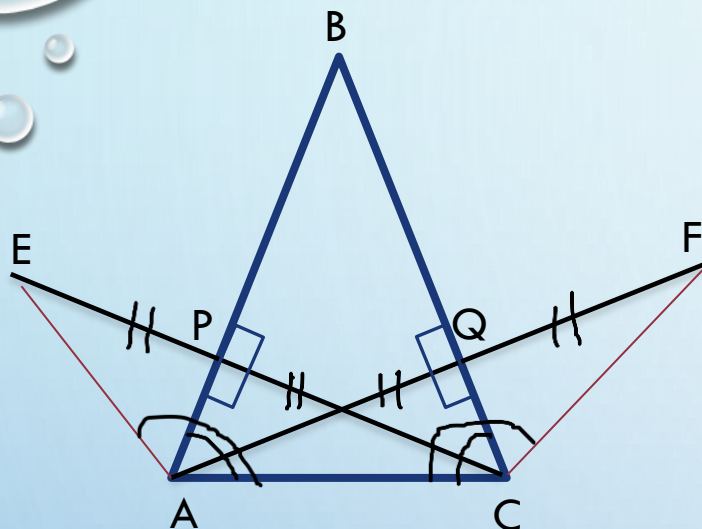
$AC = DF$

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

צ.ל.

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$



נתון:

$\triangle ABC$

$AQ \perp BC$

$CP \perp AB$

$AQ = CP$

צ.ל.

$\triangle ABC$ שווה שוקיים ($BC = AB$)

נימוק	טענה	
נתון	$AP \perp EC$	2
ע"פ ב"ע	$EP = PC$	3
משולש בעל גובה מתלכד עם תיכון	$\triangle EAC$ שווה שוקיים	4
כמו 2-4	$\triangle FCA$ שווה שוקיים	5
על פי 4,5	$CF = AC = EA$	6
	נחפוף $\triangle EAC$ ו $\triangle FCA$	7
ע"פ 6	$FC = EA$	
צלע משותפת	$AC = AC$	
נתון, 1	$AF = EC$	
צ.צ.צ.	$\triangle EAC \cong \triangle FCA$	
ז.מ.ב.ח. ($AF = EC$)	$\angle ACF = \angle EAC$	8
8, משפט: במשו"ש ($\triangle FCA$ ו $\triangle EAC$) גובה מזווית הראש הוא גם חוצה זווית	$\angle EAP = \angle CAP = \angle ACQ = \angle FCQ$	9
9	$\angle BCA = \angle BAC$	10
9, משפט: משולש בעל זוג זוויות שוות הוא שוו"ש	$\triangle ABC$ שווה שוקיים	11
	מ.ש.ל.	

משפט:

אם במשולש מתקיים:

הגבהים לשוקיים

שווים זה לזה אז

המשולש הוא שווה

שוקיים

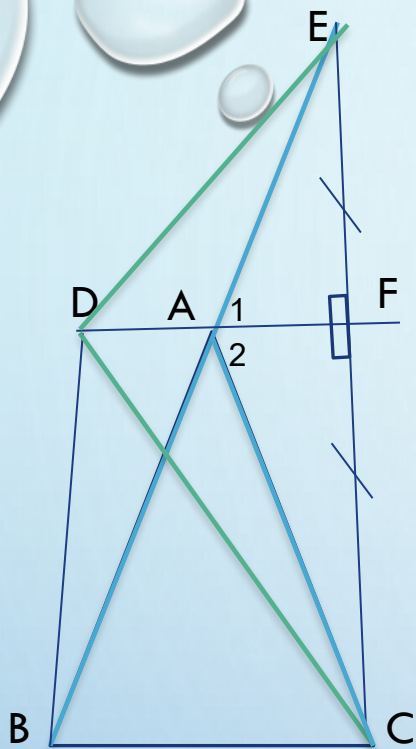
הוכחה:

1. נעשה בניית עזר: נמשיך

את הגבהים כעורכים כך ש

$CP = PE$, $AQ = QF$.

נעביר קטעים EA ו FC .



נתון:
 $\triangle ABC$ ($AB=AC$)
 $\angle EAC$ חיצוני
 $\angle A_1 = \angle A_2$
צ.ל.
 $AB < \frac{BD+DC}{2}$

פתרון של תרגיל לדוגמא

בני גורן, עמ' 49, ת.45

הוכחה:

1. נעשה בניית עזר: נמשיך AB כאורכו כך ש
 $EA=AB$. נעביר קטעים EC ו DE .

נימוק	טענה	
נתון, 1	$AC=AB=AE$	2
2	$\triangle EAC$ שווה שוקיים	3
3, נתון, משפט: במשו"ש חוצה זווית הראש הוא תיכון	$FC=EF$	4
3, נתון, משפט: במשו"ש חוצה זווית הראש הוא גובה	$AF \perp EC$	5
4,5	DF תיכון וגובה ב $\triangle EDC$	6
6	$\triangle EDC$ שווה שוקיים	7
7	$CD=DE$	8
משפט: במשולש ($\triangle EBD$) סכום של שתי צלעות גדול מהצלע השלישית	$BD+DE > BE$	9
9,8	$BD+DC > BA+AE$	10
10*2	$BD+DC > BA+BA$	11
11	$BD+DC > 2BA$	12
12	$AB < \frac{BD+DC}{2}$	13
	מ.ש.ל.	

ש"ב

בני גורן

עמ' 34, ת.52,53

עמ' 45, ת. 28,30

עמ' 47, ת.39

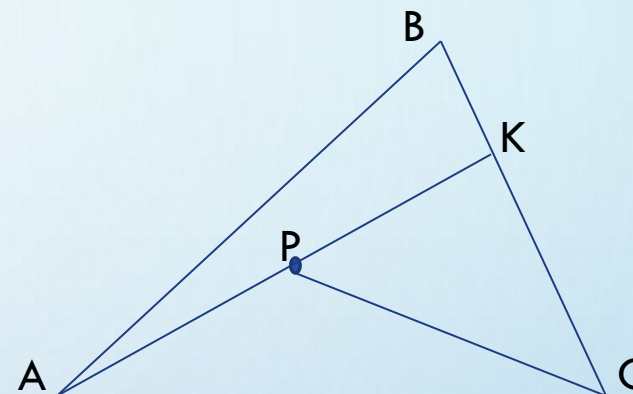
עמ'48,ת. 41,43

עמ'50, ת. 53

עמ'51, ת. 56



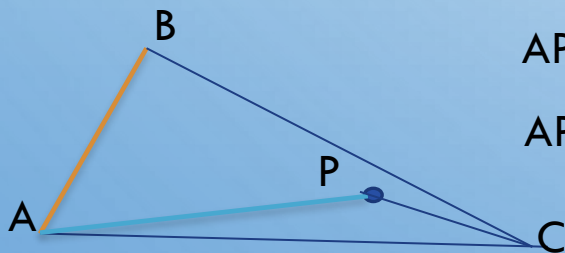
בתוך המשולש נתונה נקודה. הוכח שסכום המרחקים מנקודה זו לשני הקודקודים של המשולש קטן מסכום של שתי הצלעות שיוצאות מאותם קודקודים



צ.ל. $AP+PC < AB+BC$.
הוכחה:

1. נמשך את AP עד החיתוך עם BC.
2. נסמן $K = AP \cap BC$ (שימו לב כאן הכוונה AP-ישר שעובר דרך הנקודות A ו P)
3. $AK < AB+BK$ ע"פ אי שוויון המשולש ($\triangle ABK$)
4. $PC < PK+KC$ ע"פ אי שוויון המשולש ($\triangle PKC$)
5. $AK+PC < AB+BK+PK+KC$ (סכום אי שוויונות עם אותו כיוון)
6. $AK=AP+PK$
7. $AP+PK+PC < AB+BK+PK+KC$ ע"פ 5,6 (הורדת משני הצדדים קטעים שווים)
8. $BK+KC=BC$
9. $AP+PC < AB+BC$ ע"פ 7,8
10. מ.ש.ל.

נשים לב שמהטענה אי אפשר להשיג מסקנה ש $AP < AB$ או ש $PC < BC$. בשרטוט הבא רואים שטענה זו יכולה לא להתקיים



$AP+PC < BC+AB$
למרות ש $AP > AB$



בני גורן, עמ' 51, ת.56א

פתרונות של תרגיל משי"ב לדוגמא

בני גורן, עמ' 48, ת.43א

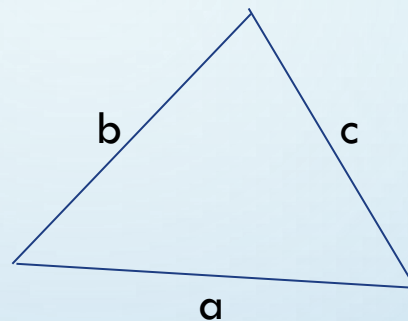
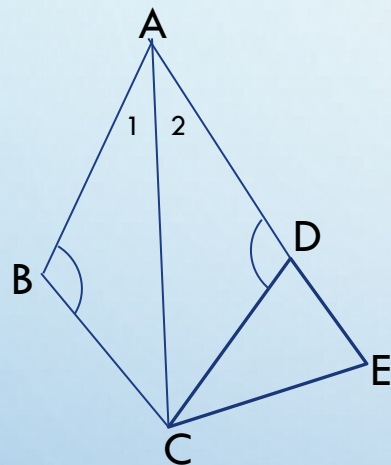
נתון:

$$\angle ADC = \angle B$$

$$BC = CD = CE$$

צ.ל.

$$\angle A_1 = \angle A_2$$



על פי אי שוויון המשולש

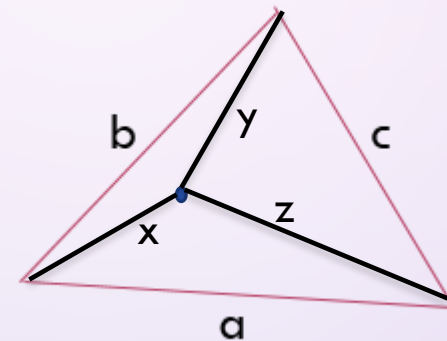
$$a < b + c$$

$$a + a < b + c + a$$

$$2a < P$$

$$a < \frac{1}{2}P$$

בני גורן, עמ' 48, ת.43ב



$$a < x + z$$

$$b < x + y$$

$$c < y + z$$

$$P < 2(x + y + z)$$

$$\frac{1}{2}P < x + y + z$$

$$x + y < a + c$$

$$y + z < a + b$$

$$z + x < b + c$$

$$2(x + y + z) < 2P$$

$$(x + y + z) < P$$

$$\frac{1}{2}P < x + y + z < P$$

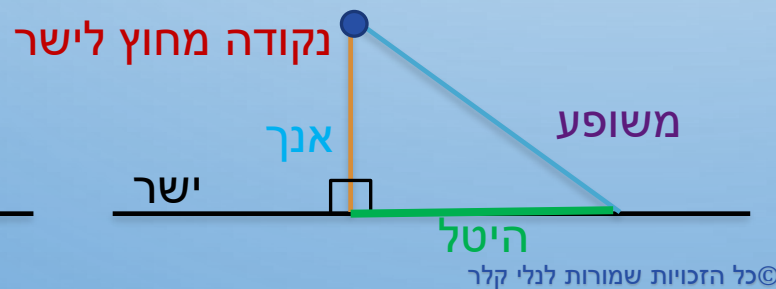
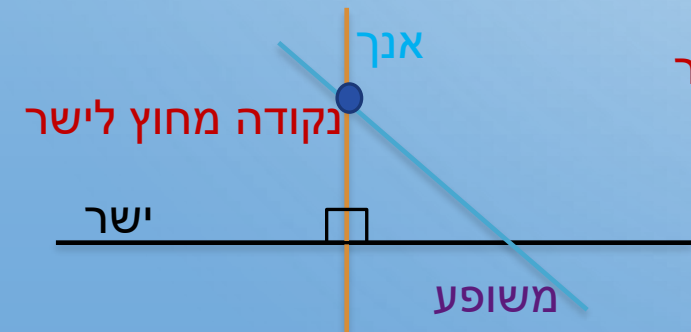
נימוק	טענה	
נתון	$CD = DE$	1
במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות	$\angle E = \angle CDE$	2
זווית חיצונית ל $\triangle CDE$	$\angle CDA > \angle E$	3
זווית חיצונית ל $\triangle CDA$	$\angle CDE > \angle A_2$	4
2-4	$\angle CDA > \angle A_2$	5
במשולש מול הזוויות הגדולה הצלע הגדולה	$AC > CD$	6
נתון, 6, צ.צ.ז. מול הצלע הגדולה	$\triangle ADC \cong \triangle ABC$	7
ח.מ.ב.ח (CD=BC)	$\angle A_1 = \angle A_2$	8
	מ.ש.ל.	

משופע והיטל במישור

נתון ישר ונקודה מחוץ לישר.

הגדרות:

- ❖ ישר שעובר דרך הנקודה ומאונך לישר הנתון נקרא **אנך** לישר.
- ❖ ישר שעובר דרך הנקודה ולא מאונך לישר הנתון נקרא **משופע** לישר.
- ❖ לקטע שמחבר את הנקודה הנתונה ונקודת החיתוך של אנך עם הישר גם קוראים **אנך לישר**
- ❖ לקטע שמחבר את הנקודה הנתונה ונקודת החיתוך של משופע עם הישר גם קוראים **משופע לישר**
- ❖ לקטע שמחבר את נקודות החיתוך של האנך והמשופע עם הישר קוראים **היטל של המשופע על הישר**.

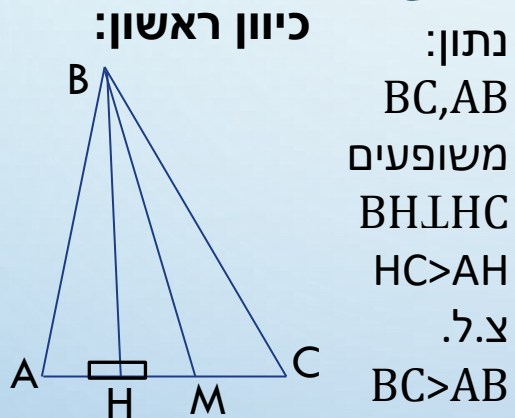


משופע והיטל במישור

משפט: אחד משני קטעים משופעים שיוצאים לישר מנקודה אחת גדול מהמשופע השני אם ורק אם היטלו גדול מהיטל של השני.

הוכחה:

נימוק	טענה	
נתון	$HC > AH$	1
1	נסמן $M \in HC$ כך ש $HM = AH$	2
נתון, 2	BH גובה ותיכון ב $\triangle ABM$	3
3	$\triangle ABM$ שווה שוקיים	4
חיצונית ל $\triangle BMC$	$\angle BMA > \angle C$	5
זוויות בסיס במשו"ש	$\angle A = \angle BMA$	6
5,6	$\angle A > \angle C$	7
במשלש מול הזווית הגדולה הצלע הגדולה	$BC > AB$	8
	מ.ש.ל.	



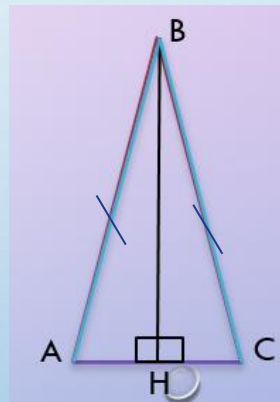
כיוון שני

כיוון השני מוכחים בשלילה.

משפט: שני קטעים משופעים שיוצאים לישר מנקודה אחת שווים זה לזה אם ורק אם ההיטלים שלהם שווים.

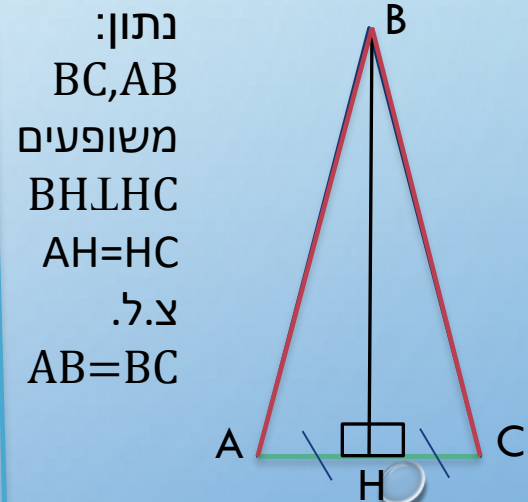
אומרים גם: שוויון ההיטלים הוא כלל הכרחי ומספיק לשוויון המשופעים

כיוון שני



$\triangle ABC$ שווה שוקיים ע"פ הנתון
 BH גובה ע"פ הנתון
 BH תיכון ע"פ המשפט: במשו"ש גובה מזווית הראש הוא גם תיכון
 $AH = HC$ ע"פ הגדרת התיכון
 מ.ש.ל.

כיוון ראשון:



הוכחה:

$\triangle AHB \cong \triangle CHB$ צ.ז.צ
 $BC = AB$ ז.מ.ב.ח. (מול $\angle H$)
 מ.ש.ל.

גיאומטריה

מכינה 2023

יחידה שלישית (שיעור שביעי, שמיני, תשיעי)

ישרים מקבילים

הגדרה: שני ישרים שאין להם נקודות

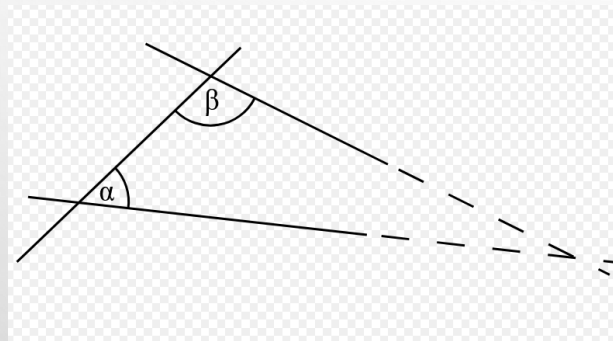
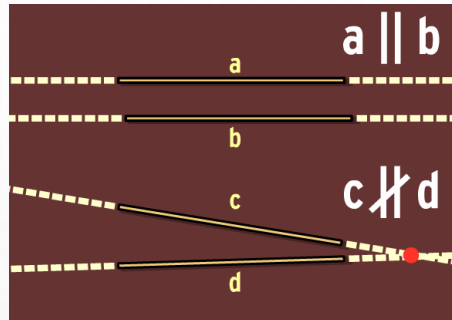
משותפות נקראים ישרים

מקבילים

אקסיומה:

אם שני ישרים ייחתכו על ידי ישר שלישי, באופן שסכום הזוויות הפנימיות שייוצרו באחד הצדדים קטן מסכום שתי זוויות ישרות, אז אם יוארכו הישרים מספיק באותו צד הם ייפגשו.

טענה זו שקולה לניסוח המקובל של האקסיומה, הקובע כי "דרך נקודה מחוץ לישר ניתן להעביר ישר אחד ויחיד שמקביל לישר הנתון".



אוקלידס
Ευκλείδης



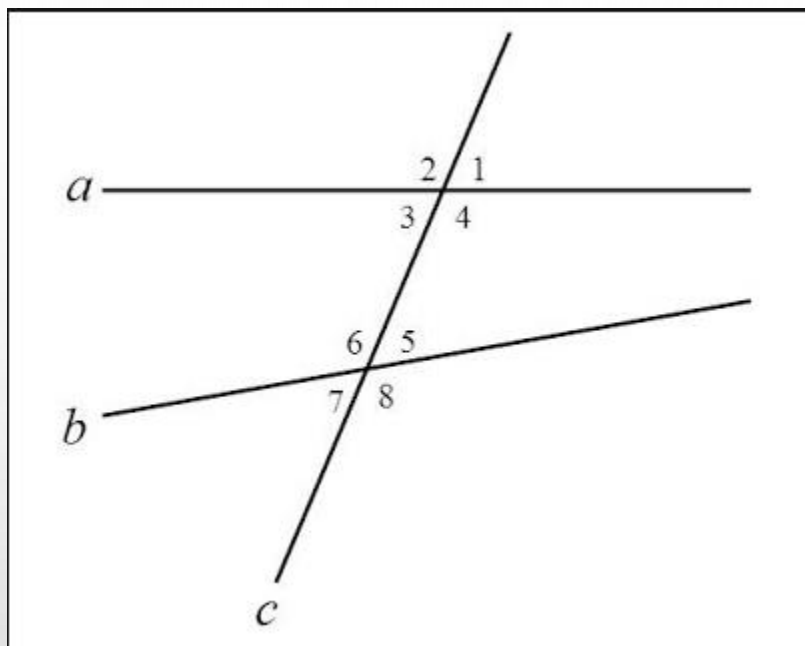
לידה

365 לפנה"ס

פטירה

275 לפנה"ס (בגיל 90 בערך)

זוויות בין שני ישרים וקו החותך



כאשר שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי נוצרות ביניהם שמונה זוויות

מיון זוויות

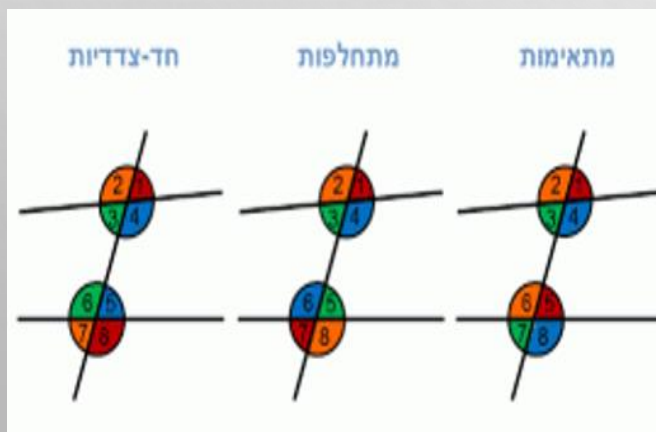
זוויות מתאימות { 1, 5
2, 6
3, 7
4, 8

זוויות מתחלפות { 1, 8
2, 7
3, 6
4, 5

זוויות חד צדדיות חיצוניות { 1, 8
2, 7

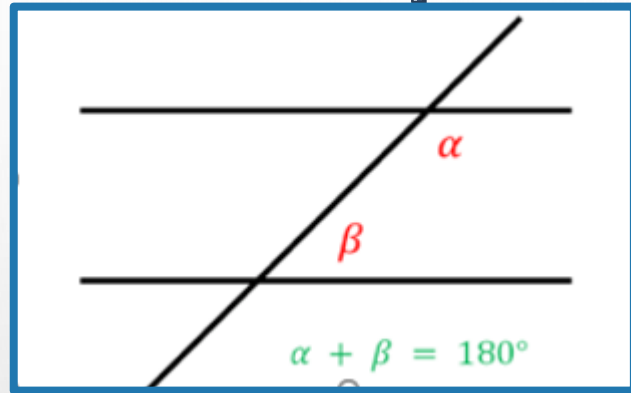
זוויות חד צדדיות פנימיות { 3, 6
4, 5

שלושה סוגים של זוויות זוויות



ישרים מקבילים

אקסיומה:



משפט:

אם חותכים שני ישרים מקבילים על ידי הישר השלישי אז מתקיים
א. זוויות מתחלפות שוות זו לזו
ב. זוויות מתאימות שוות זו לזו
ג. סכום זוויות חד צדדיות (פנימיות או חיצוניות) שווה ל 180° .

1. זוגות הזוויות המתאימות השוות זה לזה הם:

$a \parallel b$, c - ישר חותך.

$\angle 1 = \angle 5$
 $\angle 2 = \angle 6$
 $\angle 3 = \angle 7$
 $\angle 4 = \angle 8$

2. זוגות הזוויות המתחלפות השוות זה לזה הם:

$\angle 1 = \angle 7$
 $\angle 2 = \angle 8$
 $\angle 3 = \angle 5$
 $\angle 4 = \angle 6$

3. סכום זוויות חד צדדיות שווה ל 180°

$\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$
 $\angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$
 $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$
 $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$

ישרים מקבילים

משפט:

אם חותכים שני ישרים מקבילים על ידי הישר

השלישי אז מתקיים

א. זוויות מתחלפות שוות זו לזו

ב. זוויות מתאימות שוות זו לזו

ג. סכום זוויות חד צדדיות (פנימיות או חיצוניות) שווה ל 180° .

הוכחה

נימוק	טענה	
אקסיומה	$\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$	1
צמודות	$\angle 4 + \angle 1 = 180^\circ$	2
2,1	$\angle 1 = \angle 5$	3
קודקודיות	$\angle 1 = \angle 3$	4
3,4	$\angle 5 = \angle 3$	5
	המשך ההוכחה עושים באותו אופן	

$a \parallel b$, ישר חותך c .

1. זוגות הזוויות המתאימות השוות זו לזו הם:

- $\angle 1 = \angle 5$
- $\angle 2 = \angle 6$
- $\angle 3 = \angle 7$
- $\angle 4 = \angle 8$

2. זוגות הזוויות המתחלפות השוות זו לזו הם:

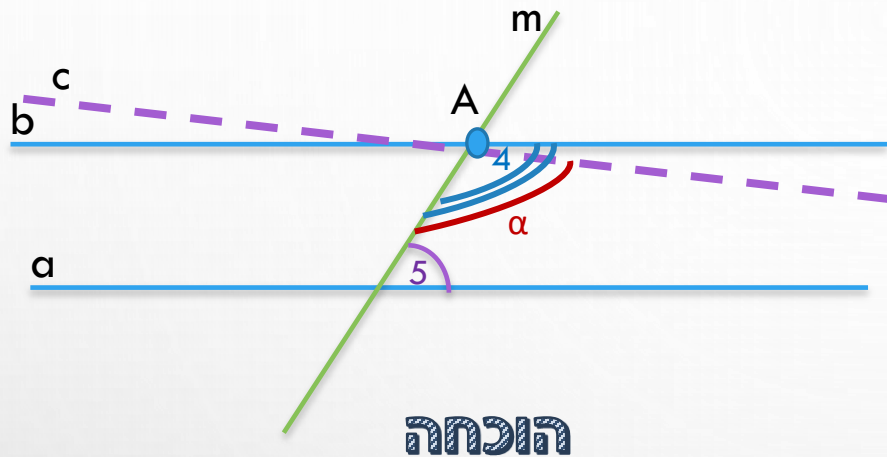
- $\angle 1 = \angle 7$
- $\angle 2 = \angle 8$
- $\angle 3 = \angle 5$
- $\angle 4 = \angle 6$

3. סכום זוויות חד צדדיות שווה ל 180°

- $\angle 1 + \angle 8 = 180^\circ$
- $\angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$
- $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$
- $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$

ישרים מקבילים

הטענה שקולה לאקסיומה של אוקלידס.



משפט הפוך:

אם חותכים שני ישרים על ידי הישר השלישי ומתקיים אחד ממקרים הבאים:

- זוויות מתחלפות שוות זו לזו
- זוויות מתאימות שוות זו לזו
- סכום זוויות חד צדדיות (פנימיות או חיצוניות) שווה ל 180°

אז ישרים מקבילים

נניח בשלילה שלמרות ש $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ הישרים a ו b לא מקבילים.

אם כך אז על פי אקסיומת אוקלידס דרך נקודה A עובר ישר אחד ויחיד שמקביל לישר a . נקרא לישר הזה c .

$c \parallel a$ לכן על פי המשפט $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$

אם כך $\angle 4 = \alpha$. סתירה! כי α היא חלק $\angle 4$.

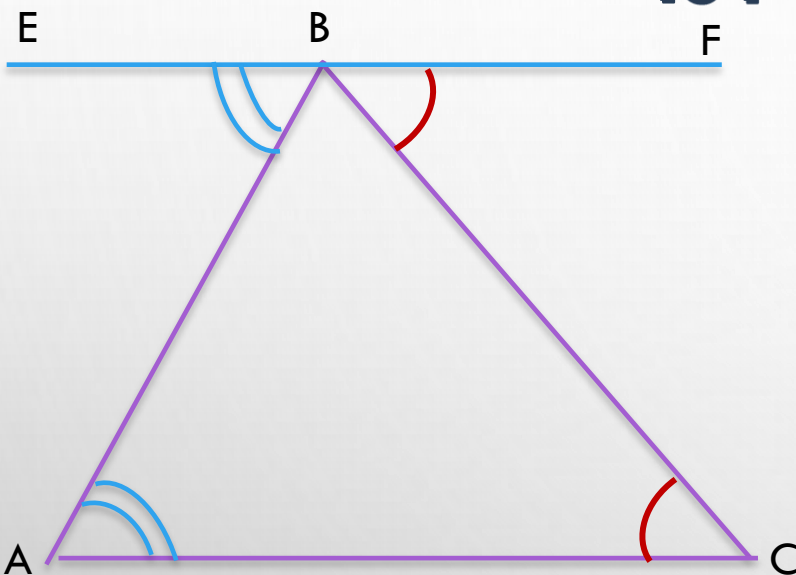
לכן ההנחה לא נכונה ו $b \parallel a$.

מ.ש.ל

סכום זוויות במשולש

סכום זוויות במשולש שווה ל 180°

הטענה שקולה לאקסיומה של אוקלידס.



1. דרך נקודה B שנמצאת מחוץ לישר AC על פי אקסיומה של אוקלידס עובר ישר מקביל ל AC. נקרא לו EF.

2. על פי המשפט שמתבסס על אקסיומה של אוקלידס
 $\angle A = \angle EBC$ - זוויות מתחלפות ($EF \parallel AC$, קו החיתוך AB)
 $\angle C = \angle FBC$ - זוויות מתחלפות ($EF \parallel AC$, קו החיתוך CB)

3. $\angle EBA + \angle ABC + \angle FBC = 180^\circ$ זווית שטוחה

4. $\angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$ על פי 2,3.

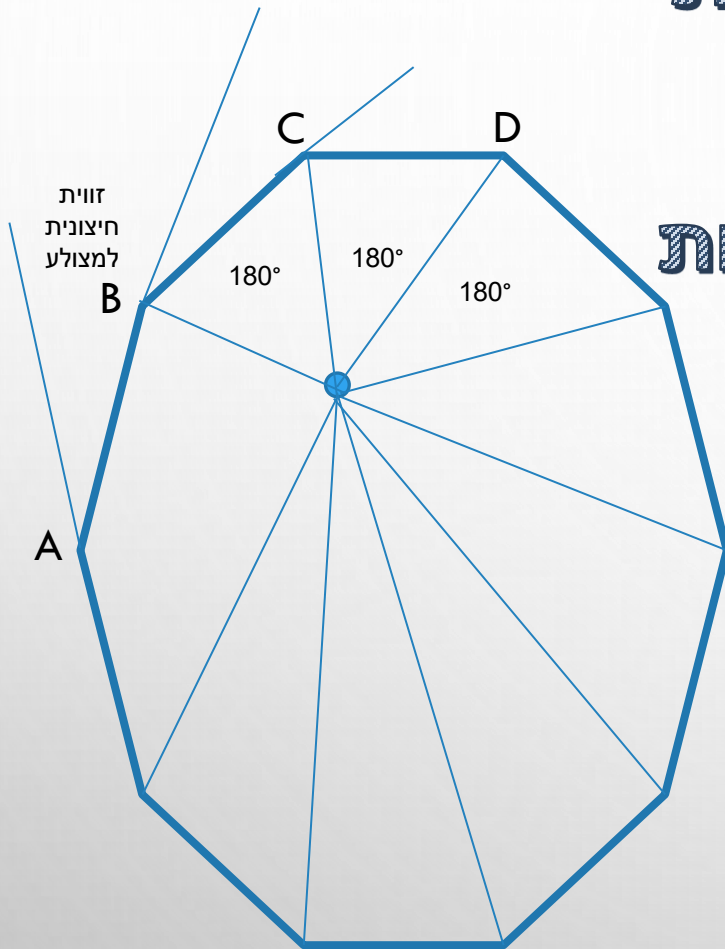
מ.ש.ל

סכום זוויות במצולע קמור בעל n צלעות

$$S = 180^\circ n - 360^\circ = 180^\circ (n - 2)$$

סכום זוויות חיצוניות למצולע קמור בעל n צלעות

$$\begin{aligned} (180^\circ - \angle A) + (180^\circ - \angle B) + (180^\circ - \angle C) + \dots &= \\ = 180^\circ n - (\angle A + \angle B + \angle C + \dots) &= \\ = 180^\circ n - 180^\circ (n - 2) &= 360^\circ \end{aligned}$$



סכום זוויות חיצוניות במצולע קמור קבוע ושווה

360°

הגדרה: מצולע משוכלל הוא מצולע

שכל הצלעות וכל הזוויות שלו שוות

גודל הזווית במצולע משוכלל

$$\alpha = \frac{180^\circ (n - 2)}{n}$$



שאלות חשיבה



1. מהי כמות המקסימלית של זוויות חדות שיכולה להיות במצולע כמור?

2. נתון משולש שווה צלעות ABC. על הצלע BC בוכרים נקודה K ובונים משולש שווה צלעות BKL, הנמצא מחוץ למשולש ABC. מסמנים נקודת החיתוך של AK ו-CL ב-T. חשבו את גודל הזווית LTK. (דרך הישר, ת. 46)

3. נתון משולש ABC. על הצלע AC בונים משולש שווה צלעות ACR, על הצלע AB בונים משולש שווה צלעות ABP הנמצאים מחוץ למשולש ABC. מסמנים נקודת החיתוך של PC ו-BR ב-I. חשבו את גודל הזווית PIR. (דרך הישר, ת. 47)



1. מהי כמות המקסימלית של זוויות חדות שיכולה להיות במצולע כמור?

$$\begin{aligned}180(n-2) &< 90^\circ k + (n-k)180^\circ \\180^\circ n - 360^\circ &< 90^\circ k + 180^\circ n - 180^\circ k \\90^\circ k &< 360^\circ \\K &< 4\end{aligned}$$

כמות המקסימלית של זוויות חדות היא 3

נניח שלמצולע יש k זוויות חדות.

כל אחת מהן קטנה מי 90° .

לכן סכום של כל הזוויות החדות קטן מי $k \cdot 90^\circ$

נשארו עוד $n-k$ זוויות לא חדות. כל אחת

מהן קטנה מי 180° כי מצולע כמור.

לכן הסכום שלהן קטן מי $180^\circ(n-k)$

לכן סכום של כל הזוויות במצולע

$$\text{קטן מי } 90^\circ k + (n-k)180^\circ$$

סכום של כל הזוויות במצולע

$$\text{שווה } 180(n-2)$$



3. נתון משולש ABC. על הצלע AC בונים משולש שווה צלעות ACR, על הצלע AB בונים משולש שווה צלעות ABP הנמצאים מחוץ למשולש ABC. מסמנים נקודת החיתוך של PC ו BR ב I. חשבו את גודל הזווית PIR. (דרך הישר, ת. 47)

דרך א'. סיבוב

נסבב את המישור סביב נקודה A ב 60° עם כיוון השעון ונמצא מקום חדש של הנקודות הרלוונטיות לבעיה.

$R \rightarrow C$ כי $\angle RAC = 60^\circ$ לכן קרן AR וקרן AC יתלכדו אחרי סבוב ב 60° ו $AC = AR$ (משולש שווה צלעות) לכן הקטעים יתלכדו.

$B \rightarrow P$ כי $\angle BAR = 60^\circ$ לכן קרן AB וקרן AP יתלכדו אחרי סבוב ב 60° ו $AB = AP$ (משולש שווה צלעות) לכן הקטעים יתלכדו.

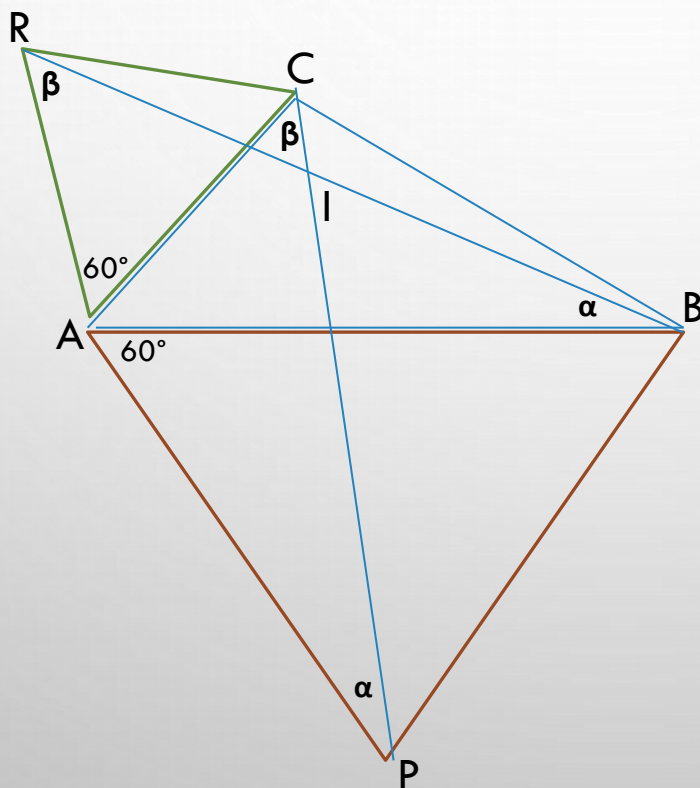
לכן המסקנה לגבי הקטעים

$RB \rightarrow CP$

מכאן נובעות שתי מסקנות:

$RB = CP$

הזווית בין RB ו PC שווה ל 60°
 $\angle PIB = 60^\circ$



דרך ב. פתרון "רגיל"

1. נחפוף משולשים CAP ו RAB

$AR = AC$, כי משולש RAC שווה שוקיים

$\angle RAB = \angle CAP = 60^\circ + \angle CAB$, כי כל הזוויות

במשולש שווה שוות ל 60°

$AB = AP$, כי משולש ABP שווה שוקיים

$\triangle CAP \cong \triangle RAB$ ע"פ צ.ז.צ.

2. $\angle APC = \angle ABR = \alpha$. ז.מ.ב.ח. ($AR = AC$), סימון

3. $\angle PCA = \angle ARB = \beta$. ז.מ.ב.ח. ($AP = AB$), סימון

4. $\angle PIR = 360^\circ - \angle RAP - \angle ARB - \angle APC$, סכום זוויות

במרובע ARCP

5. $\angle PIR = 360^\circ - 60^\circ - \angle CAB - 60^\circ - \beta - \alpha$ ע"פ 2-4

6. $\alpha + \beta + 60^\circ + \angle CAB = 180^\circ$, סכום זוויות ב $\triangle APC$

7. $\angle PIR = 360^\circ - 60^\circ - 180^\circ - 120^\circ$

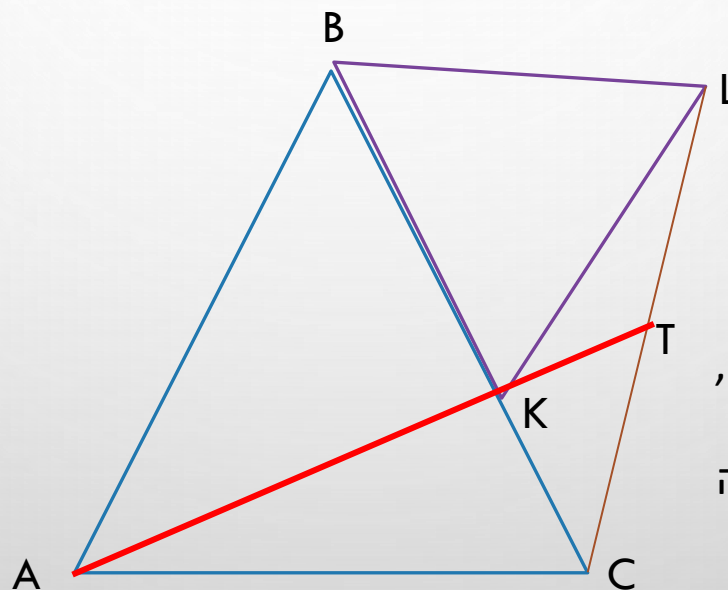
מ.ש.ל



2. נתון משולש שווה צלעות ABC. על הצלע BC בחרים נקודה K ובונים משולש שווה צלעות BKL, הנמצא מחוץ למשולש ABC. מסמנים נקודת החיתוך של AK ו CL ב T.
חשבו את גודל הזווית LTK.
(דרך הישר, ת. 46)

דרך ב. פתרון "רגיל"

1. נחפוף משולשים LBC ו ABK
 $BL = AK$, כי משולש BLK שווה צלעות
 $\angle LBK = \angle KBA = 60^\circ$, כי כל הזוויות במשולש שווה צלעות ל 60°
 $AB = BC$, כי משולש ABC שווה צלעות
 $\triangle ABK \cong \triangle LBC$ ע"פ צ.ז.צ.
2. $\angle BLC = \angle BKA = \alpha$ ז.מ.ב.ח. ($AB = BC$), סימון
3. $\angle LKP = 180^\circ - 60^\circ - \alpha$ כי $\angle AKP = 180^\circ$ (שטוחה),
 $\angle BKL = 60^\circ$ (זווית במשולש שווה צלעות), 2
4. $\angle KLT = \alpha - 60^\circ$ ($\angle BKL = 60^\circ$ זווית במשולש שווה צלעות, 2)
5. $\angle LTK = 180^\circ - (\alpha - 60^\circ) - (120^\circ - \alpha) = 120^\circ$ ע"פ סכום זוויות במשולש ($\triangle KLT$), 3, 4
מ.ש.ל



דרך א'. סיבוב

נסבב את המישור סביב נקודה B ב 60° עם כיוון השעון ונמצא מקום חדש של הנקודות הרלוונטיות לבעיה.

$L \rightarrow K$ כי $\angle LBK = 60^\circ$ לכן קרן BL וקרן BK יתלכדו אחרי סבוב ב 60° ו $BL = BK$ (משולש שווה צלעות) לכן הקטעים יתלכדו.

$C \rightarrow A$ כי $\angle ABC = 60^\circ$ לכן קרן BC וקרן BA יתלכדו אחרי סבוב ב 60° ו $BC = BA$ (משולש שווה צלעות) לכן הקטעים יתלכדו.

לכן המסקנה לגבי הקטעים

$LC \rightarrow KA$

הזווית בין LC ו KA שווה ל 60° (זווית הסיבוב) לכן $\angle CTK = 60^\circ$ ו $\angle LTK = 120^\circ$ (זווית צמודות).

שאלות חשיבה

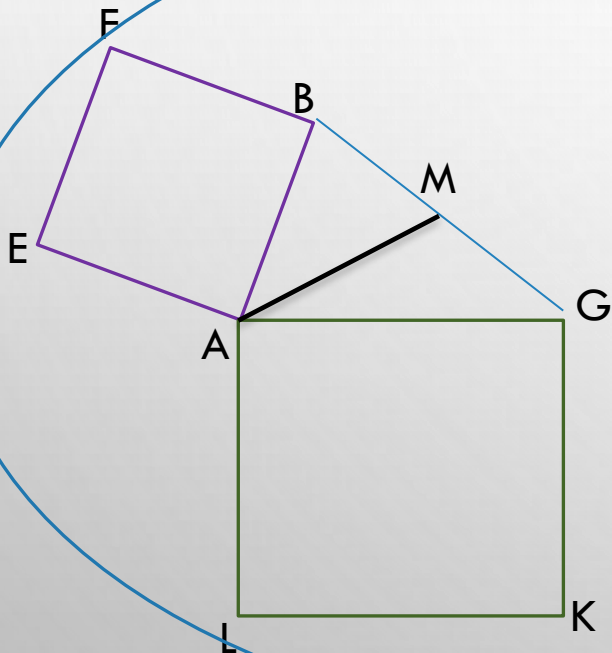


ש"ב ב.ג. עמ' 57, ת. 11.
עמ' 59 כל העמוד
עמ' 62, ת. 27
עמ' 64, ת. 37
עמ' 65, ת. 38, עמ' 69, ת. 55.

1

מצאו את זוויות המשולש ABC אם ידוע
שחוצה זווית A מחלק את המשולש
לשני משולשים שווה שוקיים.

2

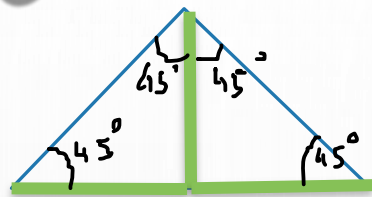


על שתי צלעות של המשולש
בונים ריבועים כלפי חוצה
(ריבוע הוא מרובע משוכלל).
הוכח שקטע המחבר קודקודי
הריבועים EL גדול פי שתיים
מתיכון מקודקוד A: AM.

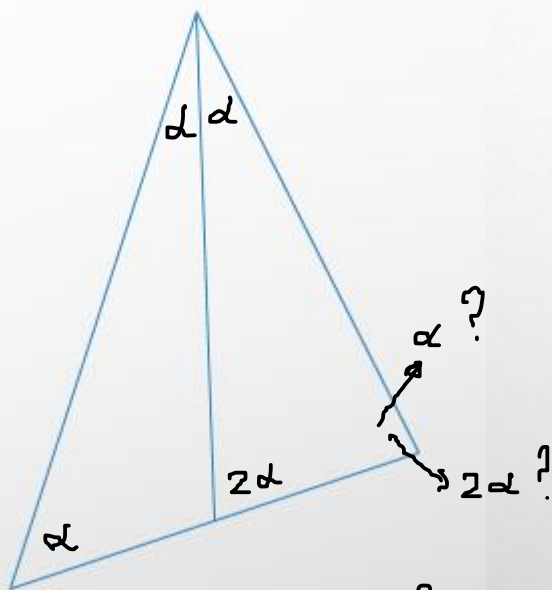
3

במחומש קמור ABCDE
נתון:
 $AE=AD$, $AC=AB$,
 $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$
הוכח ש DC גדול פי 2 מתיכון
המשולש ABE.

מצאו את זוויות המשולש ABC אם ידוע
שחוצה זוית A מחלק את המשולש
לשני משולשים שווה שוקיים.



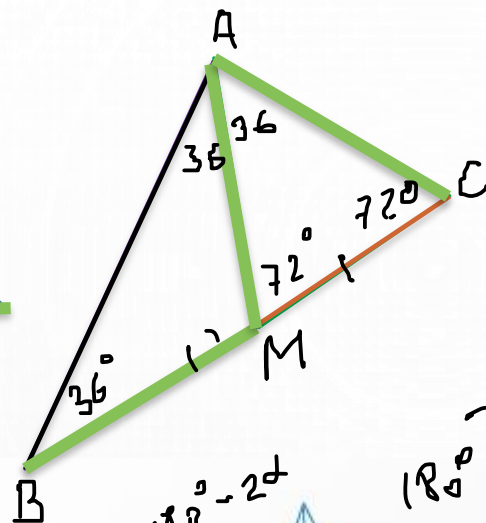
אפשרות ח'



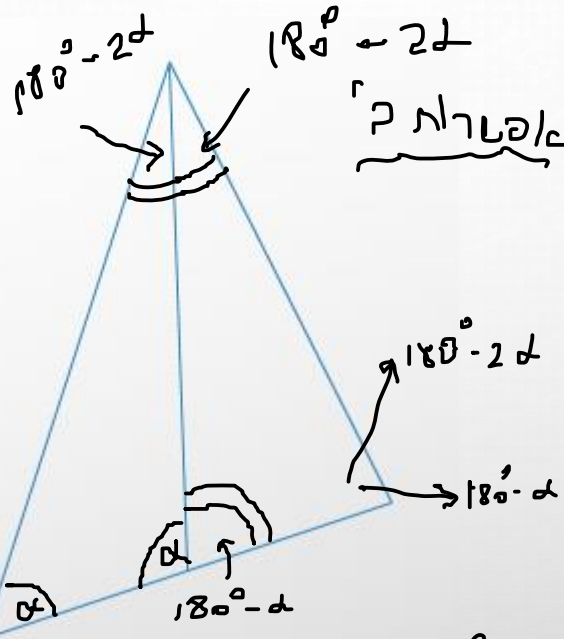
$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + 2\alpha &= 180^\circ \\ 4\alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 45^\circ \checkmark \end{aligned}$$

הנתי אנוני

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\alpha + \alpha &= 180^\circ \\ 5\alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 36^\circ \checkmark \end{aligned}$$

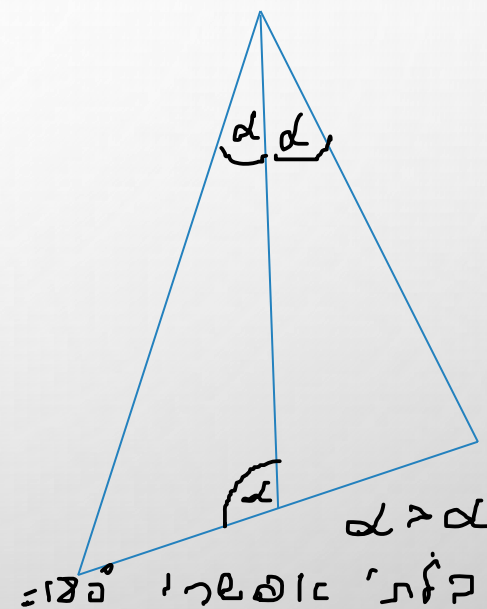


ניתן נתון יס

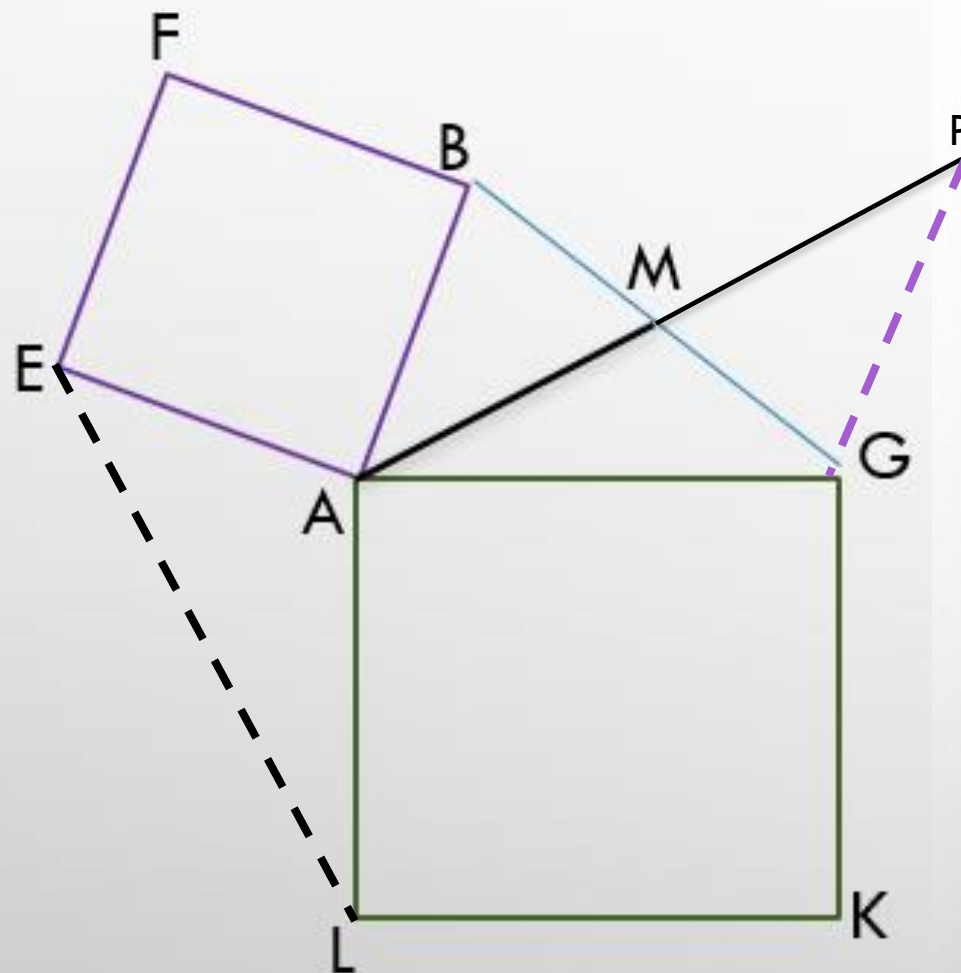


$$\begin{aligned} 2(180^\circ - \alpha) + 180^\circ - 2\alpha &= 180^\circ \\ 360^\circ &= 4\alpha \\ \alpha &= 90^\circ \times \\ 2(180^\circ - 2\alpha) + 180^\circ - 2 &= 180^\circ \\ 5\alpha &= 360^\circ \\ \alpha &= 72^\circ \checkmark \end{aligned}$$

אפשרות א'



הנתי אנוני



על שתי צלעות של המשולש
בונים ריבועים כלפי חוצה
(ריבוע הוא מרובע משוכלל).
הוכח שקטע המחבר קודקודי
הריבועים EL גדול פי שתיים
מתיכון מקודקוד A :AM.

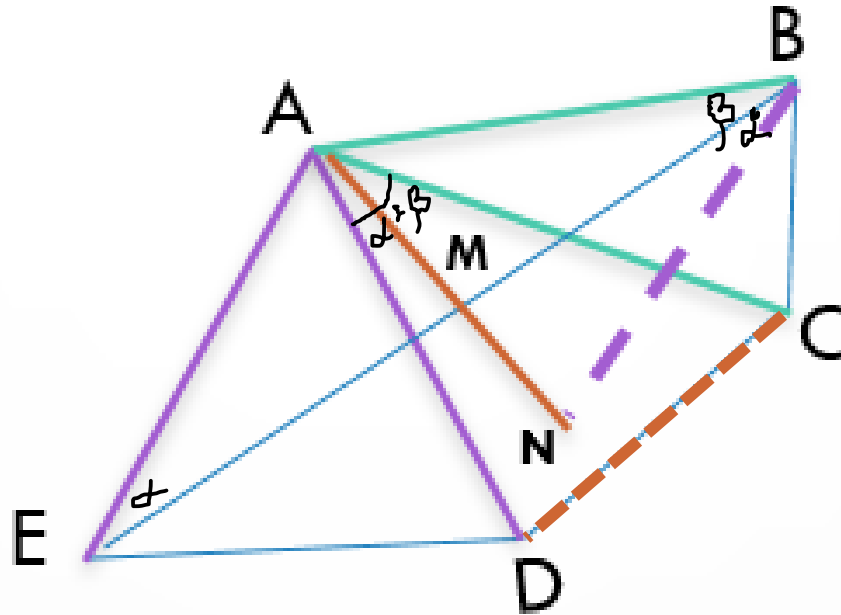
1. נמשיך את AM כאורכו $AM=PM$ נעביר קטע PG
2. $\triangle PMG \cong \triangle AMB$ צ.ז.צ (תיכון, בניית עזר וזוויות קודקודיות)
3. לכן $PG=AB$ צ.מ.ב.ח (מול זוויות קודקודיות שוות)
4. $\angle ABM = \angle MGP$ צ.מ.ב.ח (מול $MP=AM$)
5. לכן $PG \parallel AB$ (זוויות מתחלפות שוות)
6. $\angle PGA + \angle BAG = 180^\circ$ (סכום זוויות חד צדדיות פנימיות בין ישרים מקבילים)
7. $\angle EAL + \angle BAG = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$
8. לכן $\angle EAL = \angle PGA$ (6,7)
9. $\triangle EAL \cong \triangle PGA$
10. צ. ($\angle EAL = \angle PGA$, ריבוע, $PG=EA$)
11. $EL=2AM$ ע"פ 1, 10, מ.ש.ל.

במחומש קמור ABCDE
נתון:

$$AE=AD, AC=AB,$$

$$\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE = \alpha + \beta$$

צ.ל. DC גדול פי 2 מתיכון
המשולש ABE.



1. נמשיך את התיכון AM כאורכו $AM=NM$

נעביר קטע BN

2. $\triangle BMN \cong \triangle EMA$ צ.ז.צ (תיכון, בניית עזר

וזוויות קודקודיות)

3. לכן $AE=NB$ צ.מ.ב.ח (מול זוויות קודקודיות)

4. $\angle AEM = \angle NBM = \alpha$ צ.מ.ב.ח (מול $MN=AM$)

5. לכן $\angle ABN = \alpha + \beta$ ע"פ נתון, 4

$$\triangle ABN \cong \triangle ACD \quad 6.$$

צ. ($\angle ABN = \angle DAC$), נתון ז. ($AB=AC$)

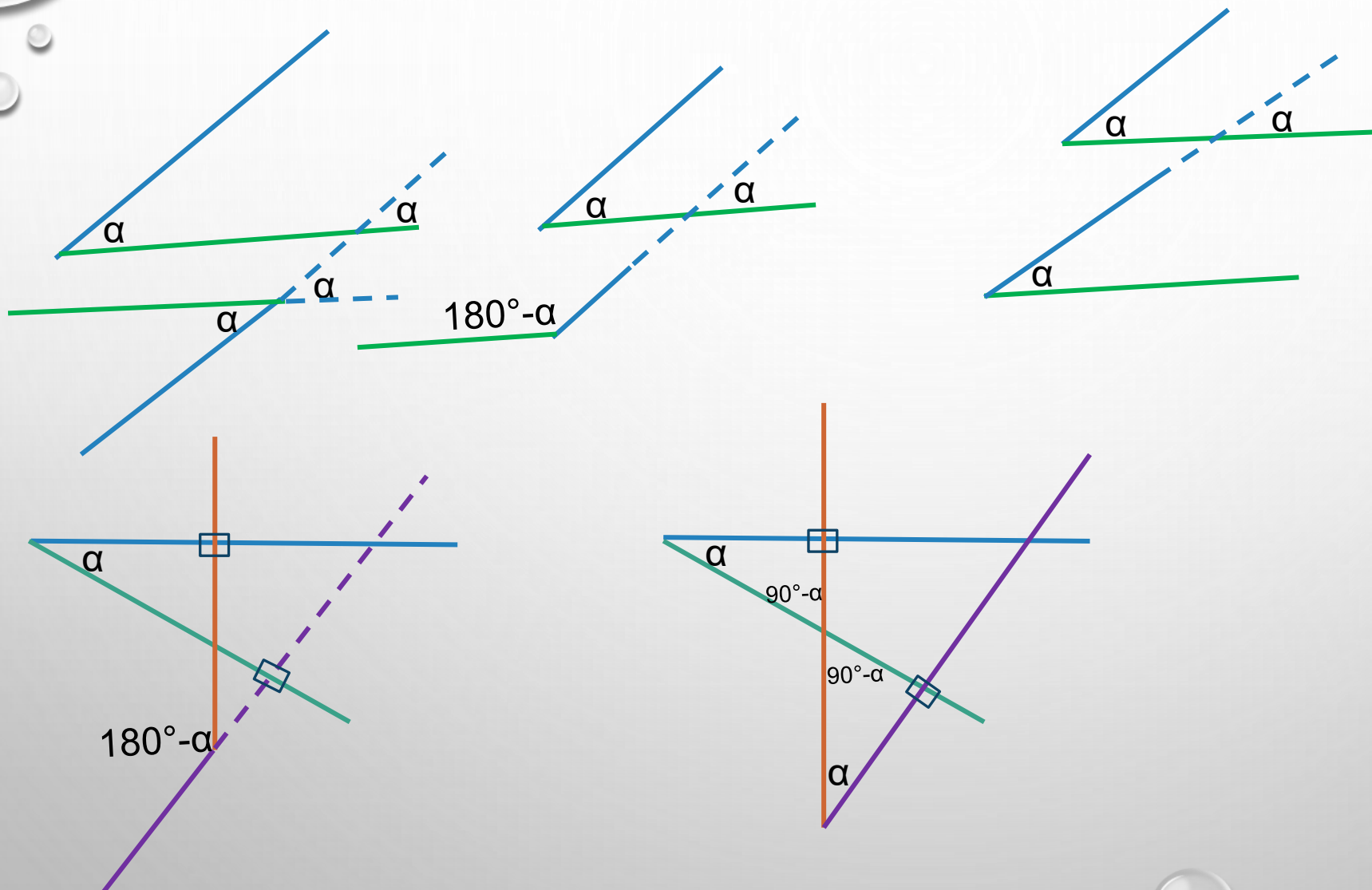
צ. ($AD=AE=BN$)

7. $AN=DC$ צ.מ.ב.ח (מול $\alpha + \beta$)

8. $DC=2AM$ ע"פ 1, 7

מ.ש.ל.

זוויות עם צלעות מקבילות או מאונכות



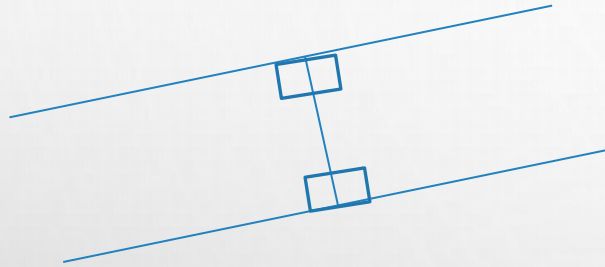
משפט:

זוויות, ששוקיהן
נמצאות על ישרים
מקבילים, הן שוות או
משלימות ל 180°

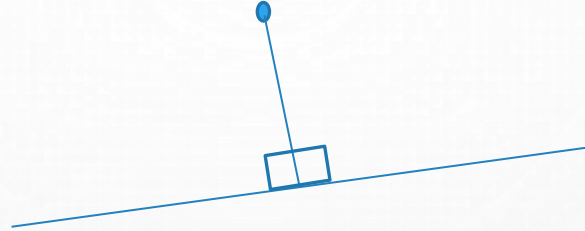
משפט:

זוויות, ששוקיהן
נמצאות על ישרים
מאונכים, הן שוות או
משלימות ל 180°

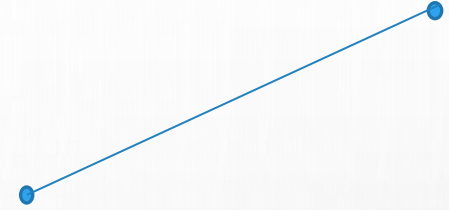
המרחקים



מרחק בין שני ישרים מקבילים
הוא אורך הקטע שקצבותיו על
הישרים והוא מאנך לישרים



מרחק בין נקודה לישר
הוא אורך האנך שיורד
מנקודה לישר

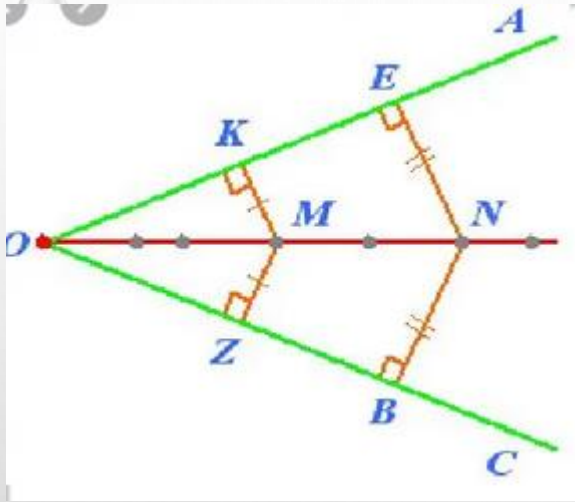


מרחק בין שתי נקודות
הוא אורך הקטע
שמחבר בין שתי
נקודות

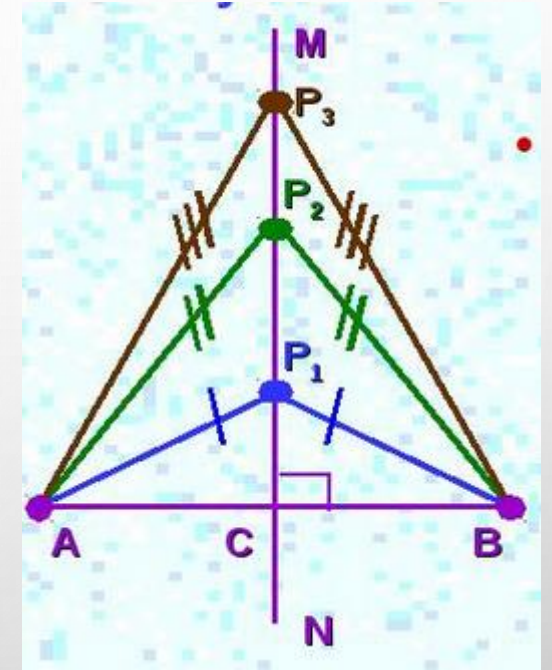
מקומות גיאומטריים

הגדרה: **מקום גיאומטרי** הוא קבוצה של **כל** הנקודות שמקיימות תכונה מסוימת

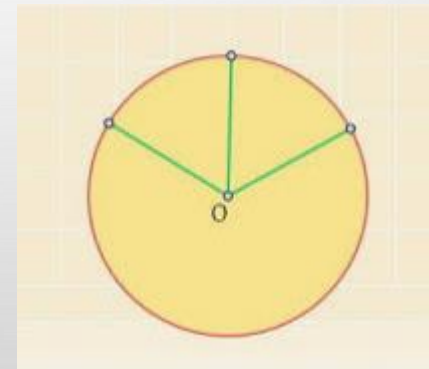
להוכיח שקבוצה היא **מקום גיאומטרי** זאת אומרת שתי טענות:
❖ כל אחת מהנקודות ששייכות לקבוצה מקיימת את התכונה המשותפת
❖ לא קיימת שום נקודה נוספת שגם היא מקיימת את התכונה אבל לא שייכת לקבוצה.



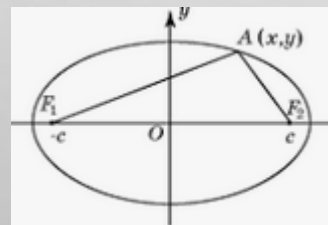
חוצה זווית הוא **מקום גיאומטרי** של כל הנקודות על המישור שנמצאות במרחקים שווים מצלעות הזווית



אנך אמצעי לקטע הוא **מקום גיאומטרי** של כל הנקודות על המישור שנמצאות במרחקים שווים קצוות הקטע.



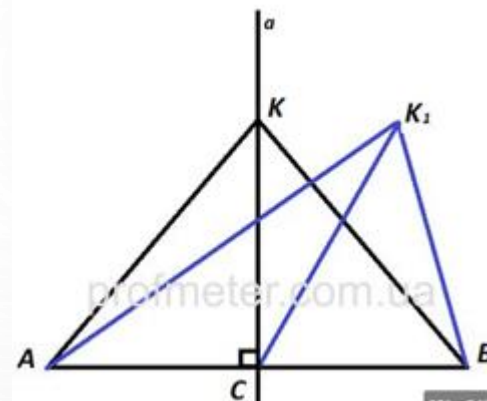
מעגל הוא **מקום גיאומטרי** של כל הנקודות על המישור שנמצאות במרחקים שווים נקודה אחת שהיא מרכז המעגל



אליפסה היא **מקום גיאומטרי** של כל הנקודות על המישור ששכום המרחקים שלהם משתי הנקודות קבוע. לנקודות קוראים מוקדים האליפסה.

מקומות גיאומטריים

הנקודה K היא נקודה שמאפיינת את כל הנקודות על הישר a לכן כל הנקודות על הישר מקיימות את התכונה.
מ.ש.ל. א.



נתון: AB קטע, ישר a
 $a \perp AB$, $C = a \cap AB$, $AC = CB$
צ.ל.: א. אם $K \in a$ אז $BK = AK$
ב. אם $K_1 \notin a$ אז $BK_1 \neq AK_1$

הוכחה:

❖ ניקח על ישר a נקודה K כלשהי.

נעביר BK , AK ,

על פי הגדרת המרחק בין הנקודות

AK הוא המרחק בין הנקודה K לנקודה A

BK הוא המרחק בין הנקודה K לנקודה B

KC הוא תיכון וגובה ב $\triangle AKB$ על פי הנתון

לכן $\triangle AKB$ שווה שוקיים ו $BK = AK$.

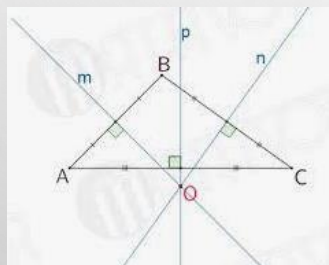
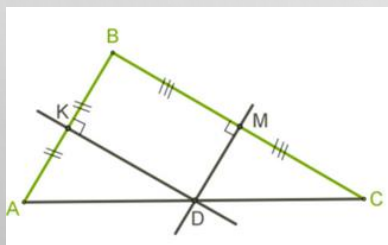
❖ ניקח נקודה K_1 כלשהי שלא שייכת לישר a .
נניח בשלילה ש $AK_1 = BK_1$.
 C אמצע AB על פי הנתון לכן CK_1 תיכון ב $\triangle AK_1B$
 K_1C גובה ב $\triangle AK_1B$ על פי המשפט: במשולש תיכון
מזווית הראש הוא גם גובה.
לכן $K_1C \perp AB$
על פי הנתון $a \perp AB$ בנקודה C .
סתירה! כי בלתי אפשרי ששני ישרים שונים מאונכים
לאותו ישר באותה נקודה.
לכן ההנחה לא נכונה ו $AK_1 \neq BK_1$
מ.ש.ל. ב.

משפט:

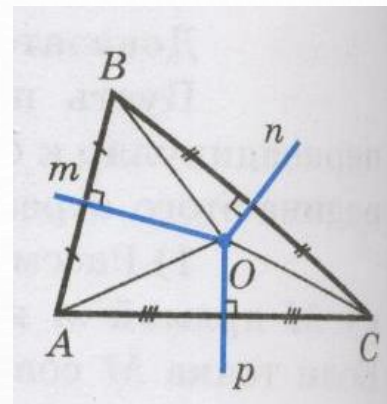
אנך אמצעי לקטע
הוא מקום גיאומטרי
של כל הנקודות
הנמצאות במרחקים
שווים מקצוות הקטע

מקומות גיאומטריים

3. קודה 0 נמצאת במרחקים שווים קצוות הקטע BC לכן על פי המשפט על קטע אמצעי כמקום גיאומטרי היא נמצאת על אנך אמצעי ל BC. לכן $O \in n$.
4. $OA=OB=OC$. לכן שלושה אנכים אמצעים לצלעות המשולש נפגשים בנקודה אחת שנמצאת במרחקים שווים מקודקודי המשולש. מ.ש.ל.



נקודת המפגש יכולה להיות בתוך המשולש (משולש חד זווית), מחוץ למשולש (משולש קהה זווית), על אחת הצלעות (משולש ישר זווית)



נתון: $\triangle ABC$
 m, n, p אנכים אמצעים לצלעות AB, BC, AC
 $O = m \cap n$
 צ.ל.: $O \in p$

הוכחה:

1. על פי המשפט על אנך אמצעי כמקום גיאומטרי $OB=OA$ (m אנך אמצעי), $OC=OA$ (p אנך אמצעי)
2. נוריד: $OC=OB$ על פי 1

משפט:

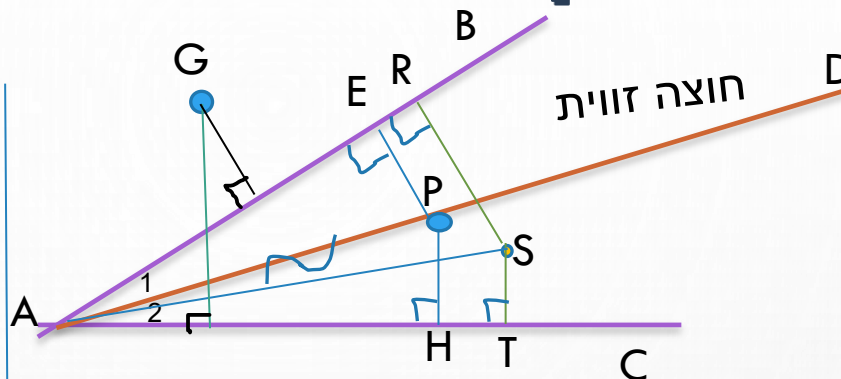
שלושה אנכים
 האמצעים לצלעות
 המשולש נפגשים
 בנקודה אחת
 שנמצאת במרחקים
 שווים מקודקודי
 המשולש.

מקומות גיאומטריים

$$\Delta EPA \cong \Delta HPA$$

$$PH=EP \text{ צ.מ.ב.ח.}$$

הנקודה P היא נקודה שמאפיינת את כל הנקודות על ח"ז לכן כל הנקודות מקיימות את התכונה.



❖ בניח שנקודה S היא נקודה **כלשהי** בתוך הזווית שלא נמצאת על ח"ז אבל מקיימת את התכונה.

נוריד: $ST \perp AC$, $SR \perp AB$. נעביר קטע AS

על פי הגדרת המרחק בין נקודה לישר

SR הוא המרחק בין הנקודה S לישר AB

ST הוא המרחק בין הנקודה S לישר AC

$\angle ATS = \angle ARS = 90^\circ$, $ST = SR$ על פי ההנחה

AS צלע משותפת לכן $\Delta ATS \cong \Delta ARS$ צ.צ.ז. מול הצלע הגדולה

$$\angle SAT = \angle SAR \text{ צ.מ.ב.ח. (SR=ST)}$$

$$\angle SAT < A_2 = \angle A_1 < \angle SAR$$

קיבלנו: $\angle SAT < A_2 = \angle A_1 < \angle SAR$ סתירה! לכן ההנחה לא נכונה ו S לא יכולה לקיים את התכונה.

❖ באותו אופן מוכחים ששום נקודה שנמצאת מחוץ

לזווית לא יכולה להיות במרחקים שווים מצלעות הזווית

נתון: $\angle A$

AD חוצה זווית

צ.ל.: AD מ"ג

הוכחה:

❖ ניקח על ח"ז AD נקודה P **כלשהי**.

נוריד: $PH \perp AC$, $PE \perp AB$

על פי הגדרת המרחק בין נקודה לישר

PH הוא המרחק בין הנקודה P לישר AC

PE הוא המרחק בין הנקודה P לישר AB

$$\angle EPA = 90^\circ - \angle A_1 \text{ סכום זוויות במשולש } (\Delta EPA)$$

$$\angle HPA = 90^\circ - \angle A_2 \text{ סכום זוויות במשולש } (\Delta HPA)$$

$$\angle A_2 = \angle A_1 \text{ על פי הנתון לכן } \angle HPA = \angle EPA$$

משפט:

חוצה זווית הוא

מקום גיאומטרי

של כל הנקודות

הנמצאות

במרחקים

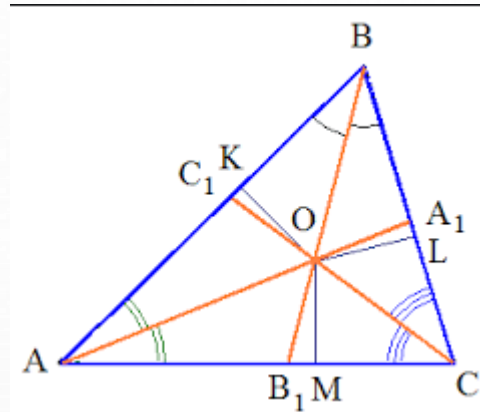
שווים מצלעות

הזווית

מקומות גיאומטריים

משפט:

שלושה חוצי זוויות
במשולש נפגשים
בנקודה אחת
שנמצאת במרחקים
שווים מצלעות
המשולש.



נתון: $\triangle ABC$

חוצי זוויות AA_1, BB_1, CC_1

$O = AA_1 \cap BB_1$

צ.ל.: $O \in CC_1$

הוכחה:

1. נוריד: $OM \perp AC, OK \perp AB$

2. על פי המשפט על חוצה זווית במקום גיאומטרי
 $OK = OM$ (AO חוצה זווית)

3. נוריד: $OL \perp CB$

4. על פי המשפט על חוצה זווית במקום גיאומטרי
 $OK = OL$ (BO חוצה זווית)

5. $OL = OM$ על פי 2,4

6. קודה O נמצאת במרחקים
שווים מצלעות הזווית ACB לכן על
פי המשפט על חוצה זווית במקום
גיאומטרי היא נמצאת על חוצה זווית

זו. לכן $O \in CC_1$

$OK = OL = OM$

7. $OK = OL = OM$

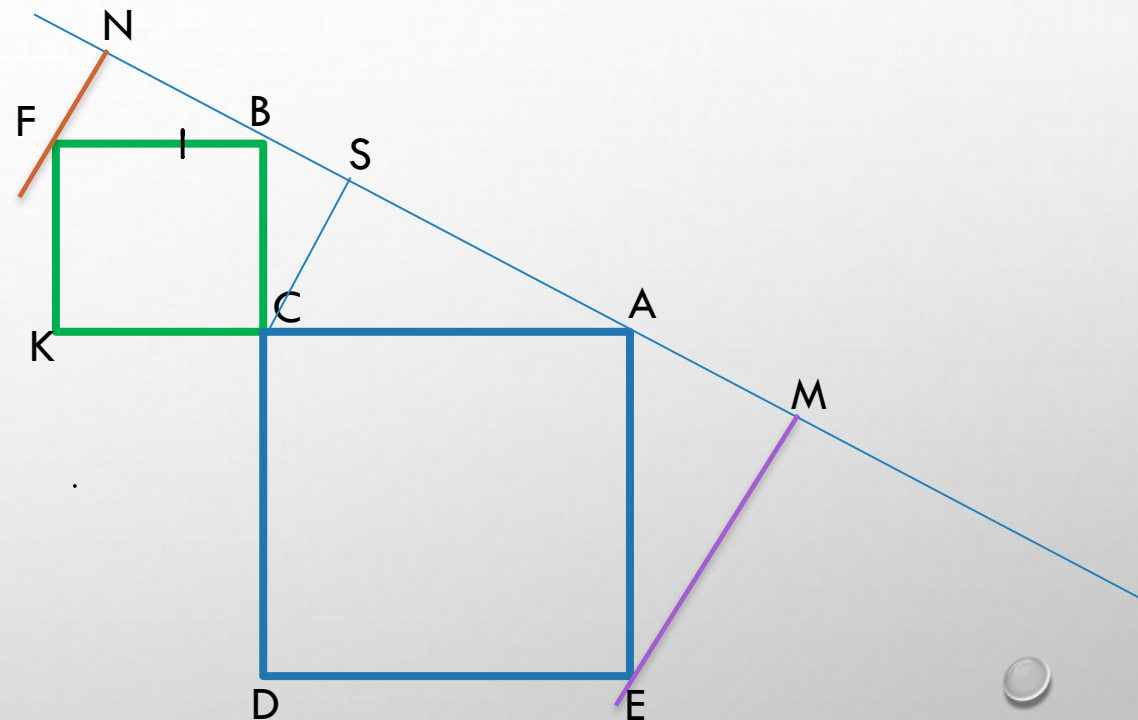
לכן שלושה חוצי זוויות במשולש
נפגשים בנקודה אחת שנמצאת
במרחקים שווים מצלעות
המשולש.

מ.ש.ל.

נשים לב שנקודת מפגש חוצי
הזוויות נמצאת במרחקים שווים
מצעות המשולש.



1. חוצי זוויות B ו C במשולש ABC נפגשים בנקודה O. זווית BAC שווה α . הביעו באמצעות α את גודל הזווית BOC.



2. על הצלעות AC ו BC של משולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) בונים ריבועים BFKC ו ACDE. מנקודות E ו F מורידים אנכים EM ו FN לישר AB.

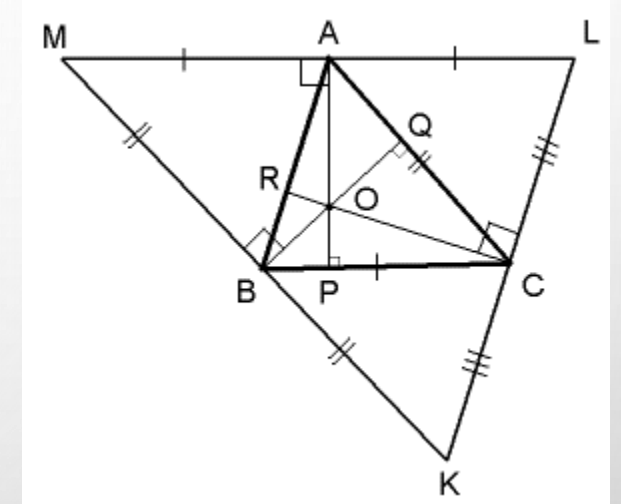
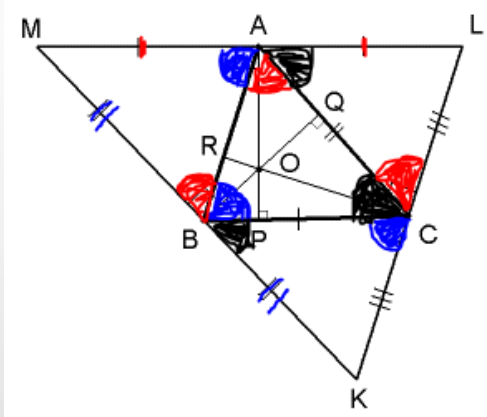
הוכח:
 $FN + EM = AB$

ש"ב בני גורן
עמ' 75, ת. 4
עמ' 76, ת. 8
עמ' 77, 10, 12
עמ' 80, ת. 23

נקודת מפגש גבהים במשולש

משפט:

שלושה גבהים של המשולש נפגשים בנקודה אחת.



הוכחה:

1. נעביר דרך נקודה A ישר $ML \parallel BC$ אפשרי על פי
2. נעביר דרך נקודה B ישר $MK \parallel AC$ אקסיומה של
3. נעביר דרך נקודה C ישר $KL \parallel AB$ אוקלידס
4. $\angle ABC = \angle MAB$ זוויות מתחלפות ($BC \parallel ML$, קו החיתוך AB)
5. $\angle BAC = \angle MBA$ זוויות מתחלפות ($AC \parallel MK$, קו החיתוך AB)
6. $\triangle MBA \cong \triangle CAB$ (ז.צ.ז.)
7. $BC = MA$ צ.מ.ב.ח. ($\angle BAC = \angle MBA$)
8. $MB = AC$ צ.מ.ב.ח. ($\angle ABC = \angle MAB$)
9. $\angle KBC = \angle BCA$ זוויות מתחלפות ($AC \parallel KM$, קו החיתוך BC)
10. $\angle ABC = \angle KCB$ זוויות מתחלפות ($AB \parallel KL$, קו החיתוך BC)
11. $\triangle BKC \cong \triangle CAB$ (ז.צ.ז.)
12. $AC = BK$ צ.מ.ב.ח. ($\angle ABC = \angle KCB$)
13. $AB = CK$ צ.מ.ב.ח. ($\angle KBC = \angle BCA$)
14. $\triangle LCA \cong \triangle BAC$ (ז.צ.ז.) (כמו 4-6)
15. $BC = LA$ צ.מ.ב.ח. ($\angle BAC = \angle LCA$)
16. $AB = CL$ צ.מ.ב.ח. ($\angle LAC = \angle BCA$)
17. $MB = BK$ על פי 8,12
18. $CL = KC$ על פי 13,16
19. $MA = AL$ על פי 7,15

נתון: $\triangle ABC$

גבהים AP, BQ, CR

צ.ל.: קיימת נקודה O כך ש

$$O = AP \cap BQ \cap CR$$

20. $AP \perp BC$, $BQ \perp AC$, $CR \perp AB$ על פי נתון (גבהים)

21. $BA \parallel KL$, $ML \parallel BC$, $MK \parallel AC$ ע"פ 1-3

22. $AP \perp BML$, $BQ \perp LMK$, $CR \perp LKL$ ישר מאונך

לאחד משני ישרים מקבילים מאונך גם לשני

23. AP, BQ, CR הם אנכים אמצעים ב $\triangle MLK$

ע"פ 17-19, 22

22. על פי המשפט אנכים אמצעים במשולש

נפגשים בנקודה אחת

מ.ש.ל

גיאומטריה

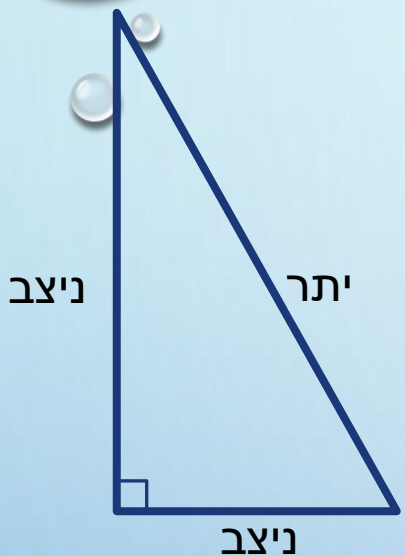
מכינה 2025

יחידה רביעית (שיעורים 10-12)

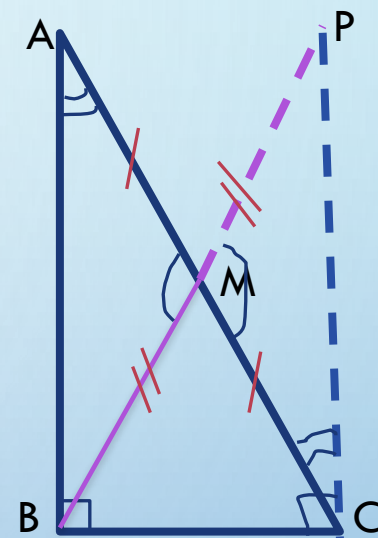
© כל הזכויות שמורות לנלי קלר

משולש ישר זווית

משפט: במשולש ישר זווית תיכון ליתר שווה למחצית היתר



נימוק	טענה	
ב"ע	נמשיך את BM כאורכו כך ש $BM=MP$, נעביר קטע PC	1
1	נחפוף $\triangle PMC$ ו $\triangle AMB$	2
זוויות קודקודיות	$MP=BM$	
נתון	$\angle BMA = \angle PMC$	
צ.ז.צ	$MC=AM$	
	$\triangle AMB \cong \triangle PMC$	
צ.מ.ב.ח ($\angle AMB = \angle CMP$)	$AB=PC$	3
צ.מ.ב.ח ($BM=MP$)	$\angle BAM = \angle PCM$	4
משפט 3, אם זוויות מתחלפות שוות אז ישרים מקבילים	$PC \parallel BA$	5
זוויות חד צדדיות פנימיות ($PC \parallel BM$, ק"ח BC), נתון	$\angle PCB = \angle ABC = 90^\circ$	6
צ.ז.צ ע"פ 3,6, BC צלע משותפת	$\triangle ABC \cong \triangle PCB$	7
צ.מ.ב.ח ($\angle ABC = \angle PCB$)	$BP=AC$	8
1	$BM = \frac{1}{2} BP$	9
8,9	$BM = \frac{1}{2} AC$	10
	מ.ש.ל.	



נתון: $\triangle ABC$

$$AM=MC, \angle ABC = 90^\circ$$

$$\text{צ.ל.} \therefore BM = \frac{1}{2} AC$$

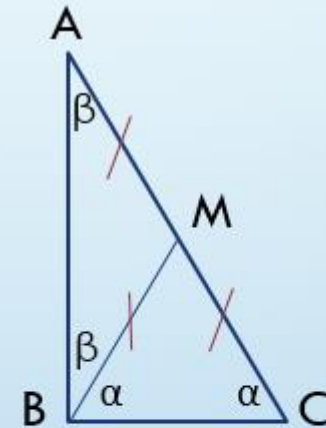
משולש ישר זווית

משפט: במשולש ישר זווית תיכון ליתר שווה למחצית היתר משפטים הפוכים

משפט (הפוך): אם קטע היוצא מזווית של המשולש לאמצע הצלע שמולה (תיכון) שווה למחצית הצלע אז המשולש הוא ישר זווית



נימוק	טענה	
נתון	$BM=AM=MC$	1
משפט: במשולש ($\triangle BMC$) מול צלעות שוות זוויות שוות	$\angle MBC=\angle BCM=\alpha$	2
כמו 2 ($\triangle BMA$)	$\angle BAM=\angle ABM=\beta$	3
סכום זוויות במשולש ($\triangle ABC$)	$2\alpha+2\beta=180^\circ$	4
4	$\alpha+\beta=90^\circ$	5
5	$\angle ABC=\alpha+\beta=90^\circ$	6
	מ.ש.ל.	



נתון: $\triangle ABC$

$$BM = \frac{1}{2} AC, AM=MC$$

$$\angle ABC = 90^\circ \text{ מ.ש.ל.}$$

משולש ישר זווית

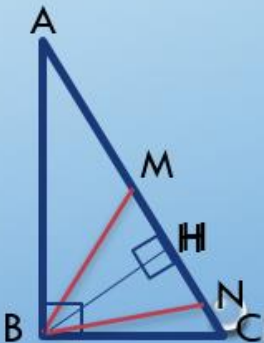
משפט: במשולש ישר זווית תיכון ליתר שווה למחצית היתר

משפטים הפוכים (המשך)

משפט: אם קטע יוצא מזווית ישרה של משולש ישר זווית ליתר שווה למחציתו אז הוא תיכון

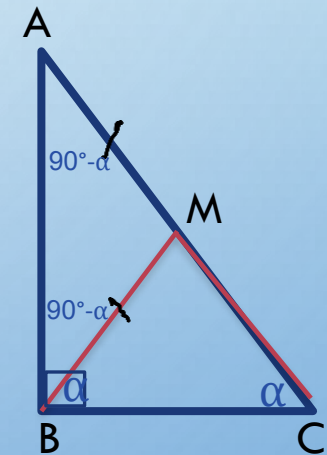
משפט: אם קטע יוצא מזווית ישרה של משולש ישר זווית ליתר שווה לאחד החלקים של היתר אז הקטע הוא תיכון

נימוק	טענה	
נתון	$BM=MC$	1
משפט: במשולש ($\triangle BMC$) מול צלעות שוות זוויות שוות	$\angle MBC = \angle BCM = \alpha$	2
סכום זוויות במשולש ($\triangle ABC$)	$\angle BAM = \angle BAC = 90^\circ - \alpha$	3
נתון, 2	$\angle ABM = 90^\circ - \alpha$	4
משפט: במשולש ($\triangle ABM$) מול זוויות שוות צלעות שוות, 3,4	$BM=AM$	5
5,1	$MC=AM$	6
	מ.ש.ל.	



נתון: $\triangle ABC$
 $\angle ABC = 90^\circ$
 $BM = \frac{1}{2} AC$
 צ.ל.: $MC = AM$

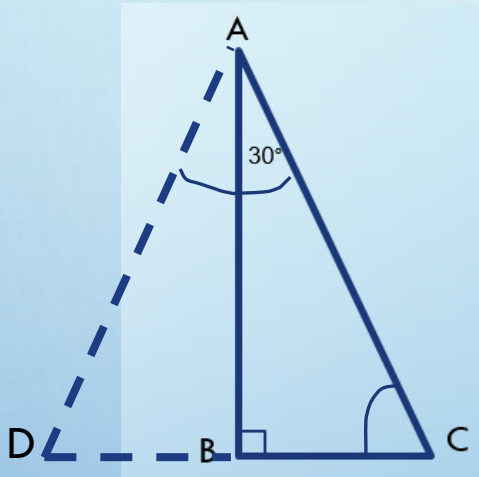
דוגמה נגדית



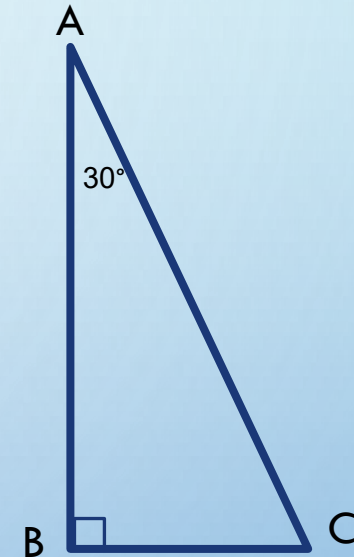
נתון: $\triangle ABC$
 $\angle ABC = 90^\circ$
 $BM = MC$
 צ.ל.: $MC = AM$

משולש ישר זווית בעל זווית בת 30°

משפט: אם במשולש ישר זווית אחת הזוויות שווה ל 30° אז הניצב שמול הזווית זו שווה למחצית היתר.



נימוק	טענה	
ב"ע	נמשיך את BC כאורכו כך ש $BD=BC$, נעביר קטע AD	1
נתון, 1	AB גובה ותיכון ב $\triangle DAC$	2
משפט: משולש בעל גובה מתלכד עם תיכון הוא שו"ש	$\triangle DAC$ שווה שוקיים	3
משפט: במשו"ש תיכון מזווית הראש הוא גם חוצה זווית	AB חוצה זווית ב $\triangle DAC$	4
נתון, 4	$\angle DAB = \angle CAB = 30^\circ$	5
5	$\angle DAC = 60^\circ$	6
סכום זוויות במשולש $(\triangle DAC)$, משפט: במשו"ש זוויות הבסיס שוות זו לזו	$\angle D = \angle DAC = \angle C = 60^\circ$	7
משפט: במשולש מול זוויות שוות צלעות שוות, 7	$AC = DC$	8
1, 8	$BC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AC$	9
	מ.ש.ל	



נתון: $\triangle ABC$

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$$\angle BAC = 30^\circ$$

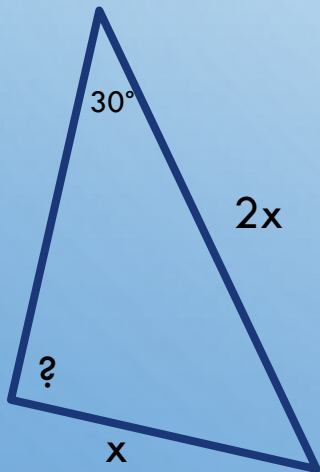
$$\text{צ.ל.} : BC = \frac{1}{2} AC$$

משולש ישר זווית בעל זווית בת 30°

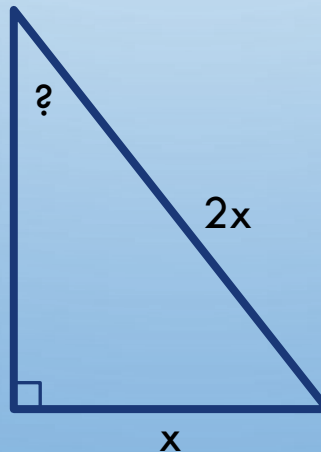
משפט: אם במשולש ישר זווית אחת הזוויות שווה ל 30° אז הניצב שמול הזווית זו שווה למחצית היתר.

משפטים הפוכים

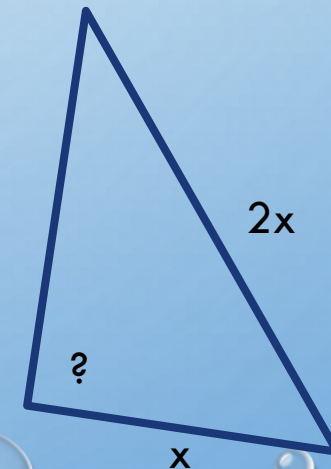
משפט: אם במשולש אחת הצלעות שווה למחצית מצלע השנייה וזווית שמולה שווה ל 30° אז המשולש הוא ישר זווית



משפט: אם במשולש ישר זווית אחת הניצבים שווה למחצית היתר אז הזווית שמולה שווה ל 30°



משפט: אם במשולש אחת הצלעות שווה למחצית מצלע השנייה אז המשולש הוא ישר זווית



משולש ישר זווית בעל זווית בת 30°

משפט: אם במשולש ישר זווית אחת הזוויות שווה ל 30° אז הניצב שמול הזווית זו שווה למחצית היתר.

משפטים הפוכים (המשך)

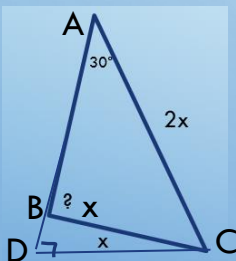
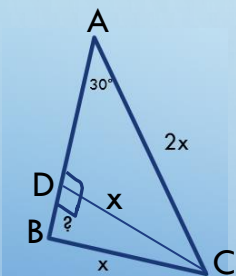


משפט: אם במשולש אחת הצלעות שווה למחצית מצלע השנייה וזווית שמולה שווה ל 30° אז המשולש הוא ישר זווית

נתון: $\triangle ABC$
 $BC = \frac{1}{2}AC$
 $\angle A = 30^\circ$
 צ.ל.: $\angle ABC = 90^\circ$

הוכחה:

1. נניח בשלילה שזווית C לא ישרה.
2. אם כך CB לא מאונך ל AB ומנקודה C אפשר הוריד אנך CD ל AB.
3. קיימות שתי אפשרויות: נקודה D נמצאת בתוך הקטע AB או נקודה D נמצאת על המשך של AB.
4. נניח בלי הקבלת הכלליות ש $D \in AB$
5. $\triangle ADC$ ישר זווית ($DC \perp AB$), $\angle A = 30^\circ$
 (נתון) לכן $DC = \frac{1}{2}AC$ (על פי המשפט במשולש ישר זווית הניצב שנמצא מול זווית בת 30° שווה למחצית היתר)
6. $BC = \frac{1}{2}AC$ (על פי הנתון)
7. $DC = BC$ (על פי 5 ו 6)
8. $\angle B = \angle BDC$ (במשולש צלעות שוות זוויות שוות).
 סתירה! כי $\angle BDC = 90^\circ$ (על פי 2) ובלתי אפשרי שבמשולש יש שתי זוויות ישרות

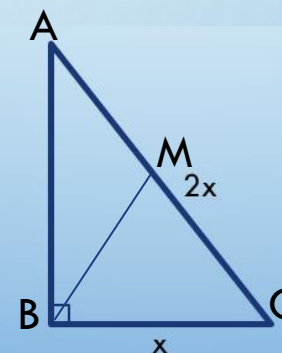


לכן ההנחה לא נכונה וזווית B שווה ל 90° מעלות.



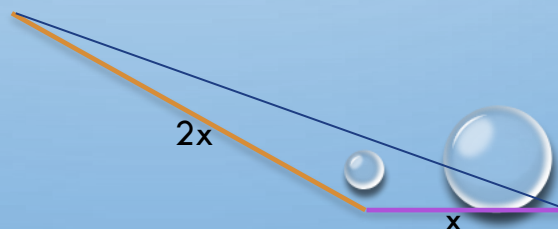
משפט: אם במשולש ישר זווית אחת הניצבים שווה למחצית היתר אז הזווית שמולה שווה ל 30°

טענה	נימוק
1. נעביר BM-תיכון ליתר	ב"ע
2. $BM = AM = MC = \frac{1}{2}AC$	1, משפט: במשולש ישר זווית תיכון ליתר שווה למחצית היתר
3. $BC = BM = MC$	נתון, 2
4. $\angle BMC = \angle C = \angle CBM$	משפט: במשולש (BMC) מול צלעות שוות זוויות שוות
5. $\angle C = 60^\circ$	סכום זוויות במשולש (BMC) שווה ל 180°
6. $\angle A = 30^\circ$	כמו 5 ($\triangle ABC$)
מ.ש.ל.	



נתון: $\triangle ABC$
 $\angle ABC = 90^\circ$
 $BC = \frac{1}{2}AC$
 צ.ל.: $\angle A = 30^\circ$

משפט: אם במשולש אחת הצלעות שווה למחצית מצלע השנייה אז המשולש הוא ישר זווית



בניות עזר

כלל: מותר להוסיף בניות עזר על השרטוט אם אפשר לעשות אותן על ידי מחוגה וסרגל בלי מספרים בלבד.

רשימת בניות עזר מותרות:

1. להעביר ישר דרך נקודה נתונה על המישור
 2. להעביר ישר דרך שתי נקודות נתונות על המישור
 3. להעביר ישר מקביל לישר נתון דרך נקודה נתונה על המישור
- שנמצאת מחוץ לישר
4. להוריד אנך מנקודה נתונה על המישור לישר נתון
 5. לעלות אנך לישר נתון מנקודה שעליו
 6. לבנות קטע שווה באורך לקטע נתון
 7. לבנות זווית שווה לזווית נתונה
 8. לבנות חוצה זווית נתונה
 9. לבנות מעגל עם מרכז בנקודה נתונה ורדיוס נתון
 10. לחלק קטע ל N חלקים שווים



אסור שלאותה בנייה תהיה יותר מדרישה אחת (לדוגמא, אם נתונות שתי נקודות על המישור אפשר לבנות קטע שמחבר את הנקודות האלה אבל אי אפשר לדרוש ממנו להיות באורך מסויים).



משפט: בכל משלש ישר זווית היתר שווה לניצב.



נתון:
 $\triangle ABC$
 $\angle C = 90^\circ$
 צ.ל:
 $AC = AB$

הוכחה:

1. נעביר חוצה זווית $\angle A$ ואנך
 אמצעי ל BC (כמו שמתואר
 על השרטוט). נסמן נקודת
 החיתוך שלהם ב K .

2. נוריד מנקודה K :

$KM \perp AC, KP \perp AB$

3. נקודה K נמצאת על חוצה זווית
 לכן היא נמצאת במרחקים שווים

מצלעות הזווית, ז"א $KP = KM$

4. $\triangle AKM \cong \triangle AKP$ כי $(90^\circ, \angle AKM = \angle AKP)$
 צלע משותפת, $KP = KM$, לכן צ.צ.ז.
 מול הצלע הגדולה)

5. מחפיפה נובע ש $AP = AM$.

6. נקודה K נמצאת על האנך האמצעי
 לקטע BC לכן היא נמצאת במרחקים
 שווים מקצוות הקטע $BK = CK$

7. $\triangle CKM \cong \triangle BKP$ כי $(90^\circ, \angle KPM = \angle KCM, KP = KM)$
 $KC = KB$, לכן צ.צ.ז. מול הצלע הגדולה)

8. לכן $BP = CM$ (צלעות מתאימות
 במשולשים חופפים)

9. $AC = AM + CM$

10. $AB = AP + PB$

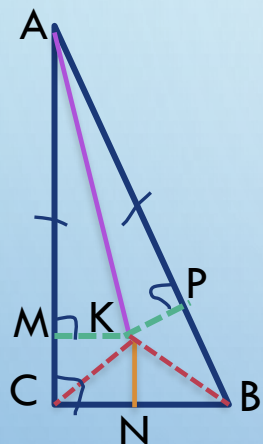
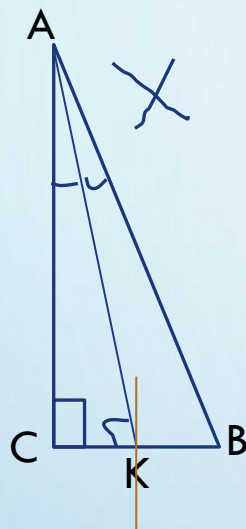
10. $AB = AC$

מ.ש.ל

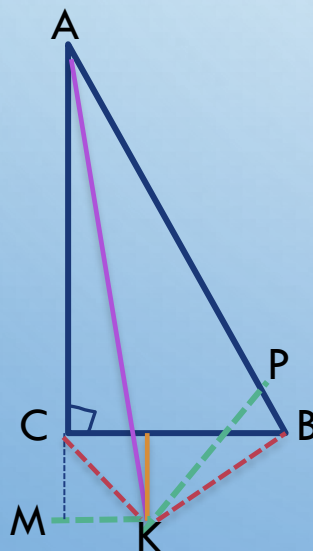
מצאו טעות
 בהוכחה!

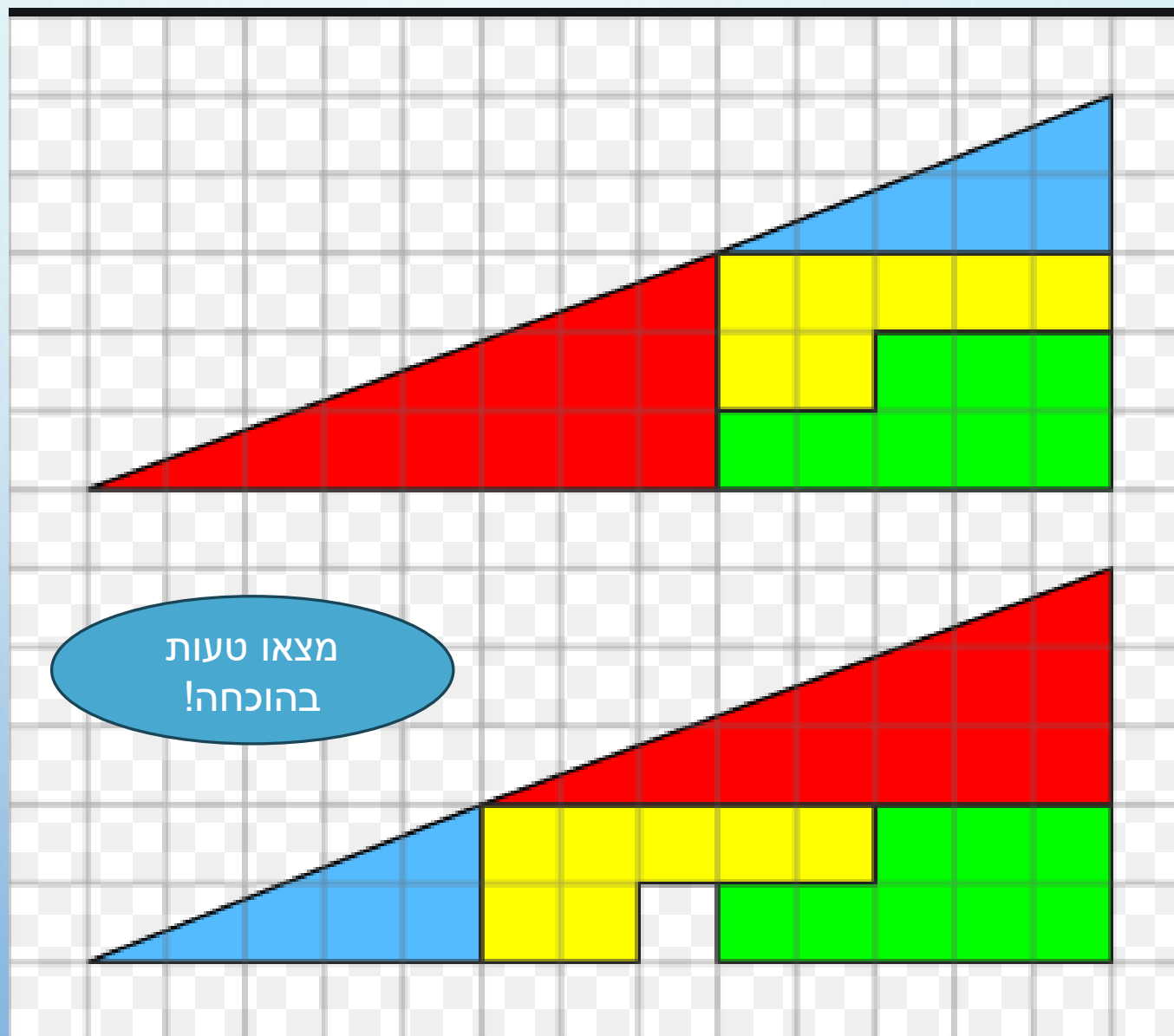
ש"ב

בני גורן עמ' 87, ת. 23, עמ' 88 ת. 24,
 עמ' 89 ת. 27, 29



$AC = AM - CM$
 $AB = AP + BP$





מצאו טעות
בהוכחה!

ש"ב
בני גורן עמ' 37, ת. 62,
דרך הישר עמ' 51, ת. 51-54
עמ' 54, ת. 57-63

משפחת מרובעים

הגדרה:

מרובע הוא מצולע בעל ארבע צלעות

הגדרה:

אלכסון הוא קטע שמחבר שני קודקודים לא סמוכים במרובע

הגדרה:

מרובע קמור הוא מרובע שכל האלכסונים שלו נמצאים בתוך המרובע.

הגדרה:

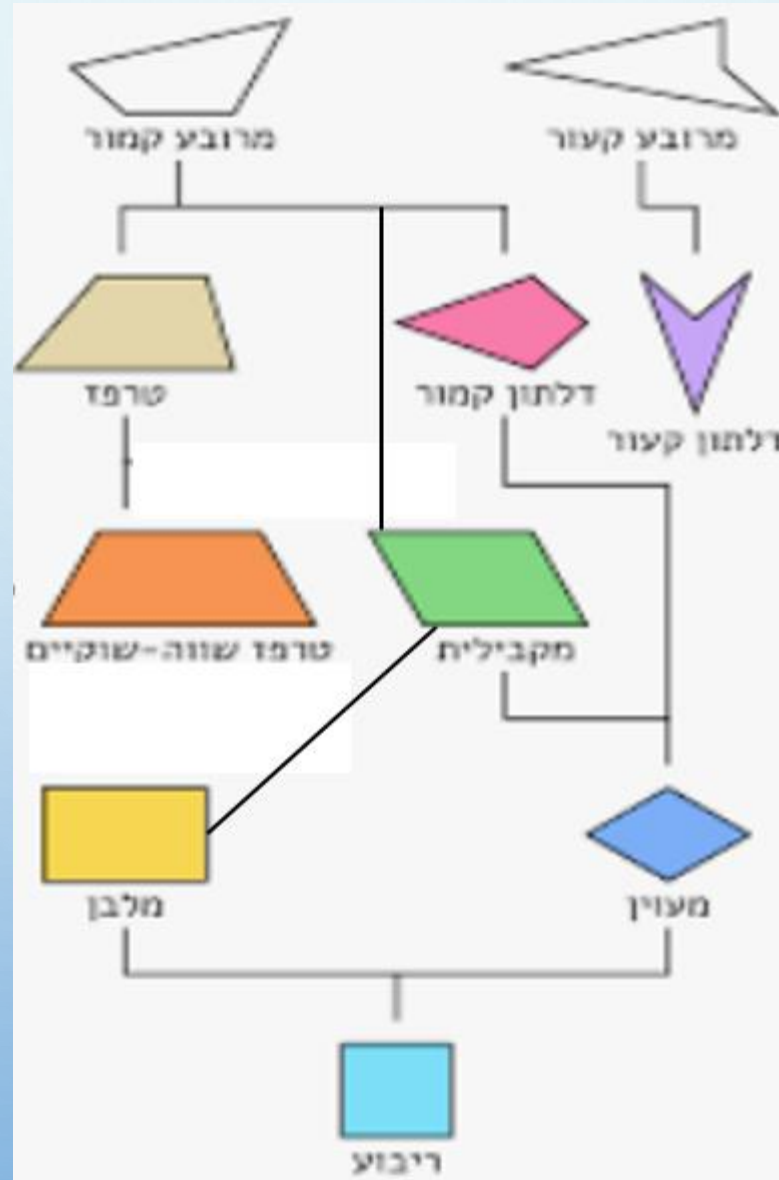
מרובע קעור הוא מרובע בעל אלכסון מחוץ המרובע.

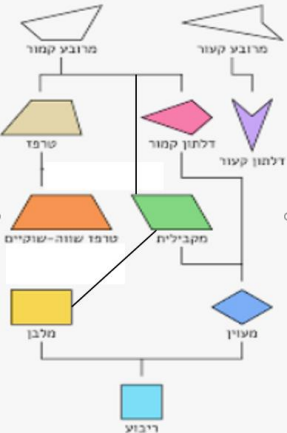
משפט:

סכום זוויות פנימיות במרובע שווה ל 360°

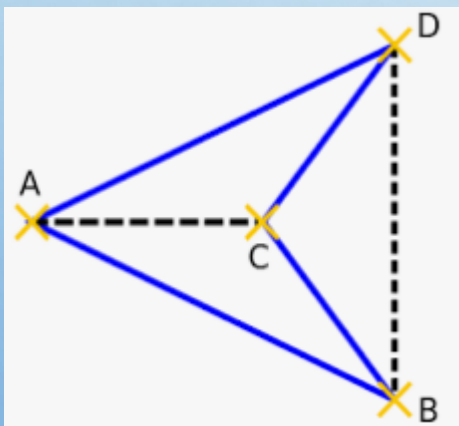
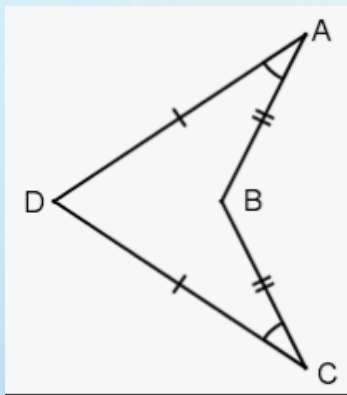
משפט:

סכום זוויות חיצוניות במרובע קמור שווה ל 360°



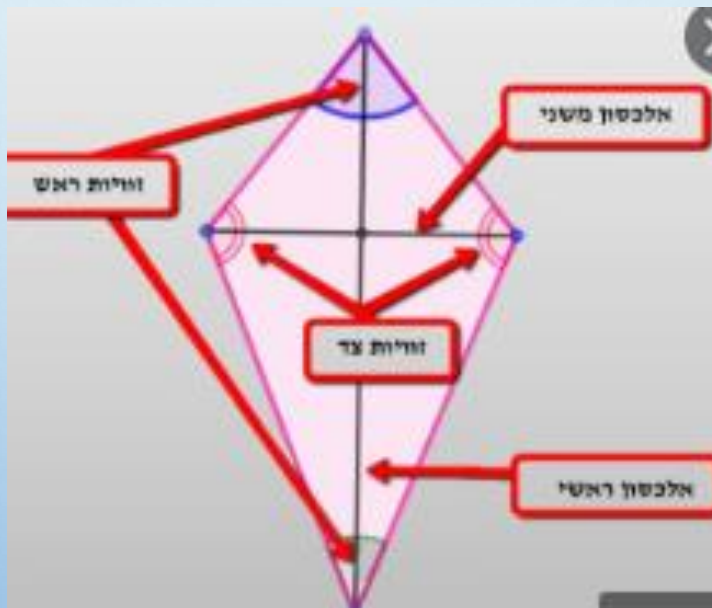


דלתון קעור

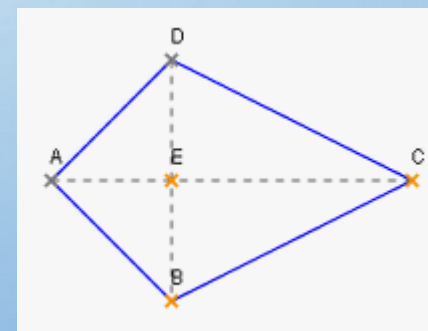
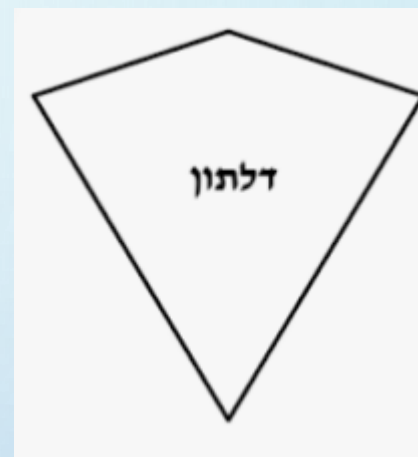


הדלתון

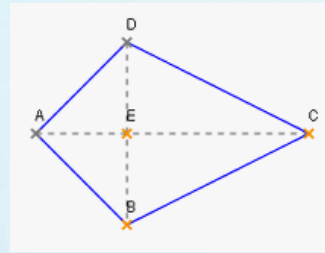
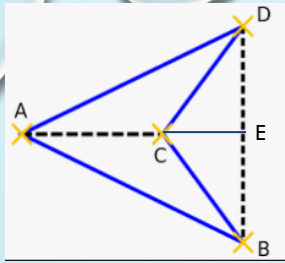
הגדרה: דלתון הוא מרובע בעל שתי זוגות צלעות סמוכות שוות



דלתון קמור



הדלתון



משפט:

בדלתון מתקיים:

❖ אלכסון הראשי מחלק אותו לשני משולשים

חופפים

❖ אלכסון הראשי חוצה את

הזוויות הראש

❖ אלכסון הראשי חוצה את

האלכסון המשני

❖ אלכסונים מאונכים זה

לזה

❖ זוויות, אותן מחבר

אלכסון המישני, שוות זו

לזו.

נתון:

ABCD דלתון

צ.ל.:

א. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

ב. $\angle A_1 = \angle A_2$

$\angle C_1 = \angle C_2$

ג. $EB = DE$

ד. $DB \perp AC$

ה. $\angle ADC = \angle ABC$

נימוק	טענה	
נתון, הגדרה	$AD = AB, DC = CB$	1
צ.צ.צ., 1, AC צ"מ	$\triangle ADC \cong \triangle ABC$	2
	מ.ש.ל א'	
ז.מ.ב.ה. ($CB = DC$)	$\angle DAC = \angle BAC$	3
ז.מ.ב.ח. ($AD = AB$)	$\angle DCA = \angle BCA$	5
כמו 5 ($\triangle ABC$)	מ.ש.ל ב'	
1, 3	AE ח"ז במשו"ש DAB.	6
משפט: במשו"ש ח"ז הראש הוא גם תיכון	AE תיכון ב $\triangle DAB$	7
7	$EB = DE$	8
	מ.ש.ל ג'	
משפט: במש"ש חוצה זווית הראש הוא גם גובה, 1, 6	AE גובה ב $\triangle DAB$	9
9	$DB \perp AC$	10
	מ.ש.ל ד'	
ז.מ.ב.ח. (AC)	$\angle ABC = \angle ADC$	11
	מ.ש.ל ה'	

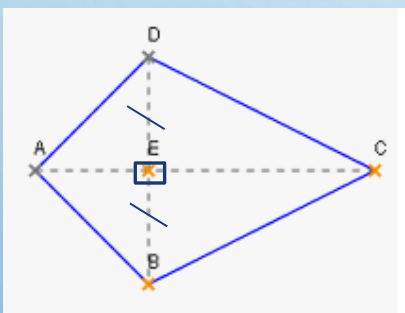
הדלתון

משפטים הפוכים

נכון או לא נכון? (נמק)

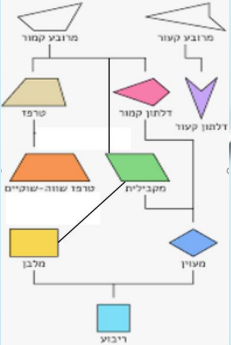
הגדרה: דלתון הוא מרובע בעל שתי זוגות צלעות סמוכות שוות

❖ מרובע בעל אלכסונים מאונכים שאחד מהם תוצה את השני הוא דלתון נכון

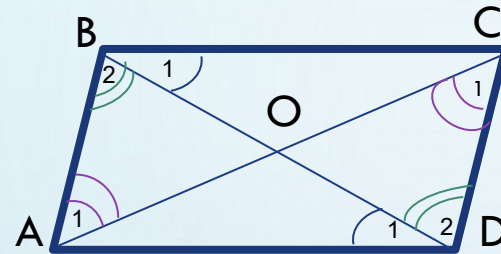


AE תיכון וגובה ב $\triangle BAD$
 לכן שווה שוקיים $\triangle BAD$
 CE תיכון וגובה ב $\triangle BCD$
 לכן שווה שוקיים $\triangle BCD$
 לכן ABCD דלתון על פי ההגדרה

❖ מרובע בעל אלכסון שמחלק אותו לשני משולשים חופפים הוא דלתון	לא נכון דוגמא נגדית: מקבילית
❖ מרובע בעל אלכסון חוצה את הזוויות שאותן הוא מחבר הוא דלתון	נכון $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ ע"פ ז.צ.ז. לכן $BC=DC, AB=AD$ ABCD דלתון ע"פ ההגדרה
❖ מרובע בעל האלכסון חוצה את האלכסון המשני הוא דלתון	לא נכון דוגמא נגדית: מקבילית
❖ מרובע בעל אלכסונים מאונכים זה לזה הוא דלתון	לא נכון דוגמא נגדית: מקבילית
❖ מרובע בעל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו הוא דלתון	לא נכון דוגמא נגדית: מקבילית



המקבילית



נתון:
 ABCD מקבילית
 צ.ל.:
 א. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$
 $\triangle BAD \cong \triangle DCB$
 ב. $AB = CD$
 $BC = AD$
 ג. $\angle A = \angle C$
 $\angle B = \angle D$
 ד. $CO = AO$
 $BO = DO$

הגדרה: מקבילית היא מרובע בעל שתי זוגות צלעות מקבילות

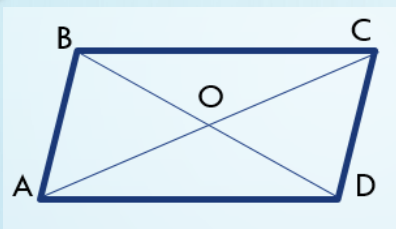
משפט:

- במקבילית מתקיים:
- ❖ כל אחד מאלכסונים מחלק אותה לשני משולשים חופפים
- ❖ צלעות נגדיות שוות זו לזו
- ❖ זוויות נגדיות שוות זו לזו
- ❖ אלכסונים חוצים את זה

נימוק	טענה	
4, $\angle D_2 = \angle B_2$ נ.ב.ח	$BC = AD$	6
4, $\angle B_1 = \angle D_1$ נ.ב.ח	$CD = AB$	7
	מ.ש.ל ב'	
4, $\angle B \cdot \angle D$ נ.ב.ח	$\angle BAD = \angle DCB$	8
5, $\angle A \cdot \angle C$ נ.ב.ח	$\angle ABC = \angle CDA$	9
	מ.ש.ל ג'	
ז. מתחלפות $(AB \parallel CD, \text{ק"ח } CB)$	$\angle B_2 = \angle D_2$	10
ז. מתחלפות $(AB \parallel CD, \text{ק"ח } AC)$	$\angle A_1 = \angle C_1$	11
7	$AB = CD$	12
10, 11, 12, ז.צ.ז	$\triangle AOB \cong \triangle COD$	13
צ.מ.ב.ח. $(\angle B_2 = \angle D_2)$	$OC = AO$	14
צ.מ.ב.ח. $(\angle A_1 = \angle C_1)$	$DO = BO$	15
	מ.ש.ל ד'	

נימוק	טענה	
ז. מתחלפות $(AD \parallel BC, \text{ק"ח } BD)$	$\angle B_1 = \angle D_1$	1
ז. מתחלפות $(AB \parallel CD, \text{ק"ח } BD)$	$\angle D_2 = \angle B_2$	2
צלע משותפת	$BD = BD$	3
ז.צ.ז	$\triangle BAD \cong \triangle DCB$	4
כמו 1-4	$\triangle ABC \cong \triangle CDA$	5
	מ.ש.ל א'	

הגדרה: מקבילית היא מרובע בעל שתי זוגות צלעות נגדיות מקבילות



משפט:

מרובע בעל שתי זוגות זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית

נתון:

ABCD מרובע, $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
צ.ל.: ABCD מקבילית

המקבילית

משפטים הפוכים

נכון

לא נכון

❖ מרובע בעל אלכסון אלכסונים חוצים זה את זה הוא מקבילית

❖ מרובע בעל שתי זוגות צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית

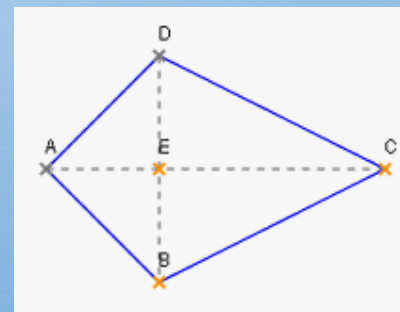
❖ מרובע בעל זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות הוא מקבילית

❖ מרובע בעל שתי זוגות זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית

❖ מרובע בעל זוג צלעות נגדיות שוות וזוג צלעות נגדיות מקבילות



❖ מרובע בעל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית



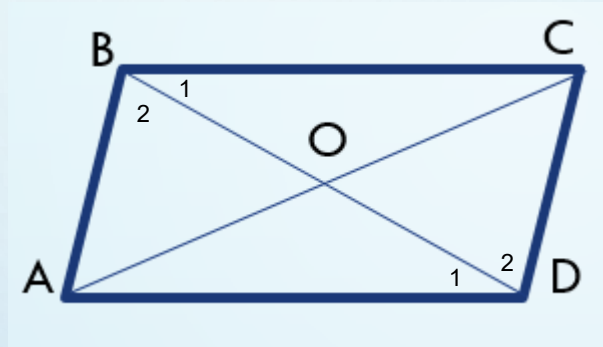
נימוק	טענה	
סכום זוויות במרובע	$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 360^\circ$	1
נתון, 1	$2\angle A + 2\angle B = 360^\circ$	2
2	$\angle A + \angle B = 180^\circ$	3
אקסיומת המקבילים	$BC \parallel AD$	4
3, נתון	$\angle A + \angle D = 180^\circ$	5
כמו 4	$CD \parallel AB$	6
ע"פ ההגדרה, 6, 4	ABCD מקבילית	4
	מ.ש.ל.	

הגדרה: מקבילית היא מרובע בעל שתי זוגות צלעות נגדיות מקבילות

משפט: מרובע בעל זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית

נתון: ABCD מרובע, $AD \parallel BC$
צ.ל.: ABCD מקבילית

המקבילית משפטים הפוכים



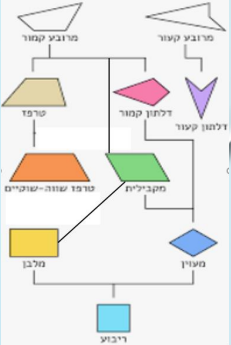
טענה	נימוק	
1	נחפוף $\triangle CBD$ ו- $\triangle ADB$	
$\angle B_1 = \angle D_1$	זוויות מתחלפות ($AD \parallel BC$, ק"ח BD)	
$AD = BC$	נתון	
$BD = BD$	צלע משותפת	
$\triangle CBD \cong \triangle ADB$	צ.ז.צ	
2	$\angle D_2 = \angle B_2$	ז.מ.ב.ח ($BC = AD$)
3	$CD \parallel AB$	משפט: אם זוויות מתחלפות שוות אז ישרים מקבילים
4	ABCD מקבילית	ע"פ ההגדרה, נתון, 3,
מ.ש.ל.		

משפט:

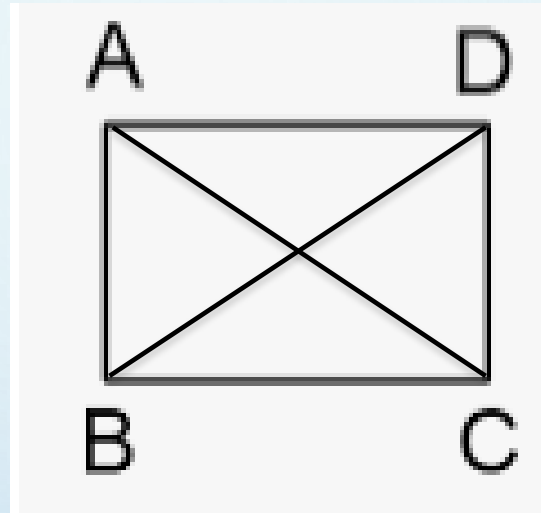
מרובע בעל שתי זוגות צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית

נתון: ABCD מרובע, $AD = BC$, $AB = CD$
צ.ל.: ABCD מקבילית

טענה	נימוק	
1	נחפוף $\triangle CBD$ ו- $\triangle ADB$	
$AB = CD$	נתון	
$AD = BC$	נתון	
$BD = BD$	צלע משותפת	
$\triangle CBD \cong \triangle ADB$	צ.צ.צ	
2	$\angle D_2 = \angle B_2$	ז.מ.ב.ח ($AD = BC$)
3	$CD \parallel AB$	משפט: אם זוויות מתחלפות שוות אז ישרים מקבילים
4	$\angle D_1 = \angle B_1$	ז.מ.ב.ח ($CD = AB$)
5	$AD \parallel BC$	כמו 3
6	ABCD מקבילית	ע"פ ההגדרה, 3, 5,
מ.ש.ל.		



המלבן



הגדרה: מלבן הוא מקבילית בעלת זווית ישרה

משפט:

במלבן מתקיים:

- ❖ כל התכונות של המקבילית
- ❖ כל הזוויות ישרות
- ❖ אלכסונים שווים זה לזה
- ❖ כל הקטעים המתקבלים על ידי חיתוך אלכסוני המלבן שווים זה לזה

הוכחה:

1. הטענה הראשונה נובעת מהגדרת המלבן
2. הטענה השנייה נובעת מכך שזוויות נגדיות במלבן (מקבילית) שוות זו לזו, סכום זוויות חד צדדיות בין המקבילים שווה ל 180° , אחת הזוויות על פי הנתון ישרה לכן כל הזוויות ישרות

נכון או לא נכון? (נמק)

- ❖ מרובע בעל אלכסונים שווים זה לזה **לזה הוא מלבן**
- ❖ מקבילית בעלת אלכסונים שווים **זה לזה היא מלבן**
- ❖ מרובע בעל האלכסונים חוצים זה את זה ושווים זה לזה **הוא מלבן**
- ❖ מרובע בעל זוג זוויות ישרות (נגדיות או סמוכות) **הוא מלבן**
- ❖ מרובע בעל זוג צלעות שוות ואלכסונים שווים **הוא מלבן**
- ❖ המרובע שבו אלכסונים חותכים זה את זה לשתי זוגות של קטעים שווים **הוא מלבן**

3. הטענה נובעת מחפיפת

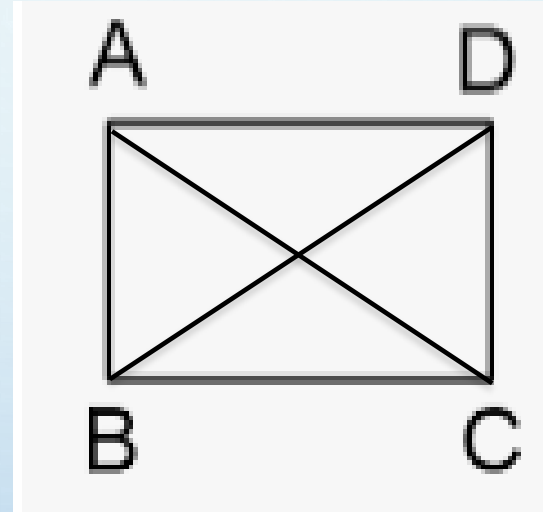
המשולשים ABC ו DCB על פי צ.ז.צ.

4. הטענה נובעת מכך

שאלכסונים המלבן שווים זה לזה (על פי 3) וחוצים זה את זה (על פי 1). מ.ש.ל.

המלבן

משפטים הפוכים



כדי להוכיח שמרובע מלבן
צריך להוכיח שהוא מקבילית
ויש לו אלכסונים שווים או
זווית ישרה

משפט:

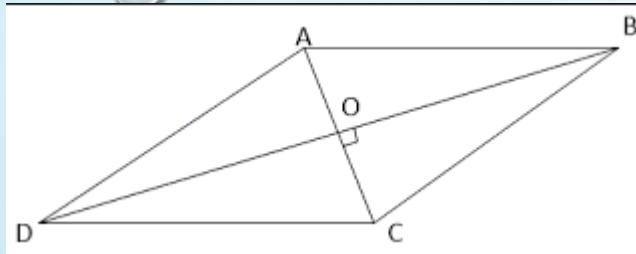
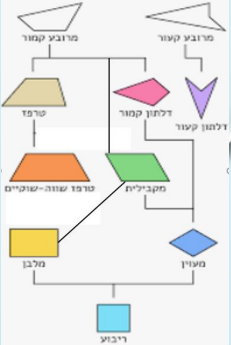
- המרובע הוא מלבן אם מתקיימת לפחות אחת מטענות הבאות:
- ❖ יש לו זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה
 - ❖ יש לו זוג צלעות מקבילות ושוות ואלכסונים שווים
 - ❖ יש לו אלכסונים שווים וחוצים זה את זה
 - ❖ יש לו שלוש זוויות ישרות
 - ❖ שתי זוגות צלעות נגדיות שוות וזווית ישרה
 - ❖ שתי זוגות צלעות נגדיות שוות ואלכסונים שווים לזה

הגדרה: מלבן הוא
מקבילית בעלת
זווית ישרה

משפט:

מרובע הוא מלבן
אם הוא מקיים
תכונות הכרחיות
של המקבילית
ואחת התכונות
של המלבן

המעוין



נימוק	טענה	
על פי הגדרת המעוין	ABCD מקבילית	1
מ.ש.ל. א'	מ.ש.ל. א'	
צלעות נגדיות במקבילית, 1	$AD=BC, DC=AB$	2
ע"פ הגדרת המעוין	$DC=AD$	3
2,3	$DA=CD=BC=AB$	4
	מ.ש.ל. ב'	
4	$\triangle DAB, \triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA$ שווה שוקיים	5
אלכסונים של המקבילית חוצים זה את זה, 1	$OB=DO, OC=AO$	6
5,7	AO, BO, CO, DO תיכונים במשו"ש	7
משפט: תיכון מזווית הראש במשו"ש הוא גובה ותיכון	AO, BO, CO, DO גבהים וחוצי זוויות במשולשים של 5	8
8	$DB \perp AC$	10
	מ.ש.ל. ג'	
8	AC, DB חוצי זוויות	11
	מ.ש.ל. ד'	

הגדרה: מעוין הוא מקבילית בעלת זוג צלעות סמוכות שוות

משפט:

במעוין מתקיים:

❖ כל התכונות של

המקבילית

❖ כל הצלעות שוות זו לזו

❖ אלכסונים מאונכים זה

לזה

❖ אלכסונים חוצים את

הזוויות של המעוין

נתון:

ABCD מעוין

צ.ל.:

א. ABCD מקיים

את התכונות של

המקבילית

ב. $DA=CD=BC=AB$

ג. $DB \perp AC$

ד. $\angle A_1 = \angle A_2$

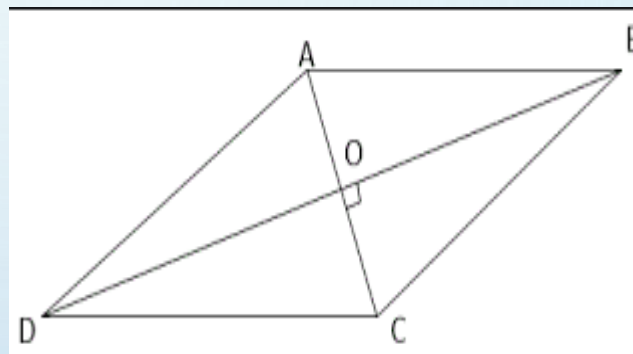
$\angle B_1 = \angle B_2$

$\angle C_1 = \angle C_2$

$\angle D_1 = \angle D_2$

המעוין

משפטים הפוכים



כדי להוכיח שמרובע מעוין
צריך להוכיח שהוא מקבילית
אחת מתכונות הבעות:

- ❖ זוג צלעות סמוכות שוות
- ❖ אלכסונים מאונכים זה לזה
- ❖ אחד מאלכסונים חוצה
אחת הזוויות זווית

הגדרה: מעוין הוא
מקבילית בעלת זוג
צלעות סמוכות שוות

משפט:

מרובע הוא מעוין
אם הוא מקיים
תכונות הכרחיות
של המקבילית
ואחת התכונות
של המעוין

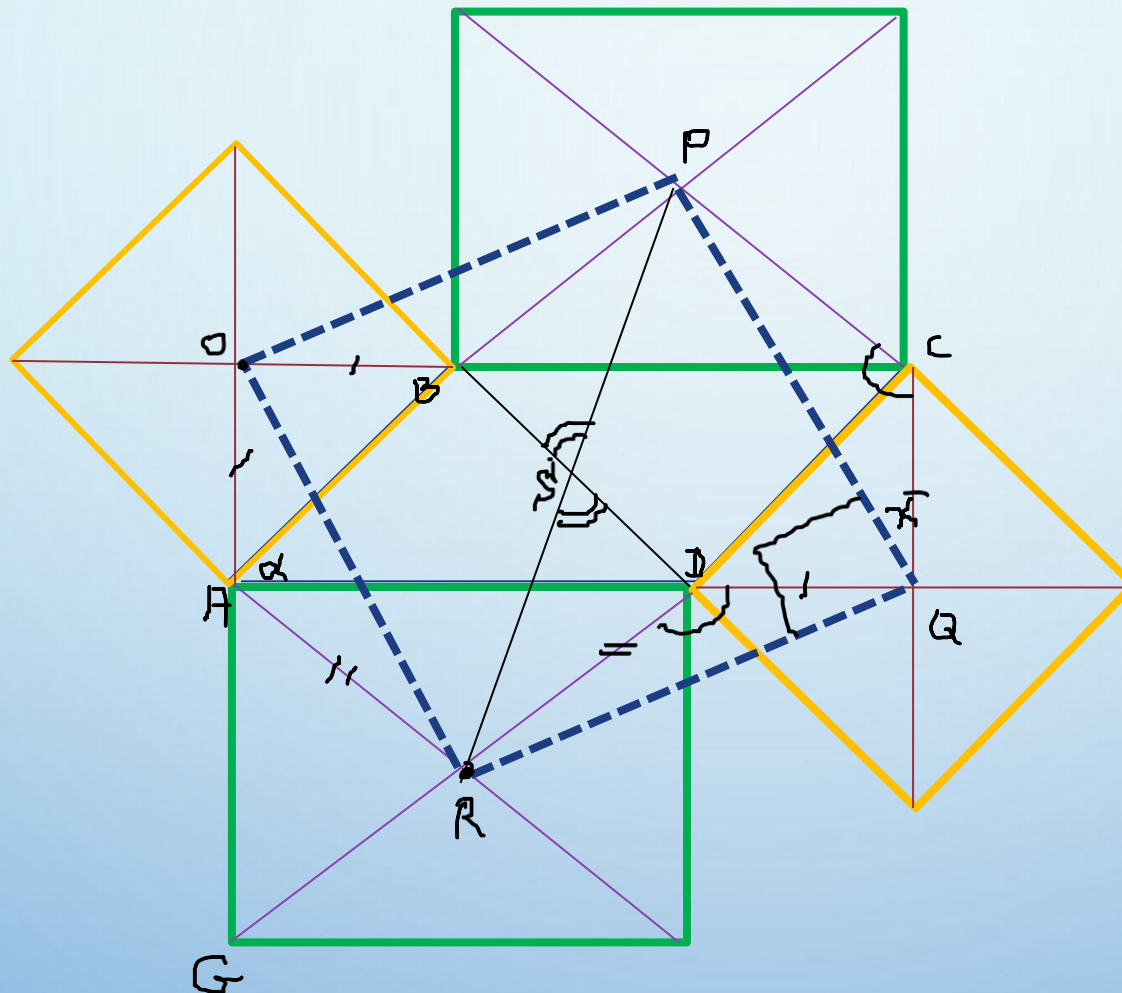
משפט

המרובע הוא מעוין אם מתקיימת לפחות
אחת מטענות הבאות:

- ❖ יש לו זוג צלעות נגדיות מקבילות
ושוות וזוג צלעות סמוכות שוות
- ❖ יש לו זוג צלעות מקבילות ושוות זוג
צלעות סמוכות שוות
- ❖ יש לו אלכסונים מאונכים וחוצים זה
את זה
- ❖ יש לו שני אלכסונים חוצי זוויות
המרובע
- ❖ שתי זוגות צלעות נגדיות שוות
ואלכסונים מאונכים או אלכסון חוצה
זווית או זוג צלעות סמוכות
- ❖ שתי זוגות צלעות נגדיות שוות
ואלכסונים מאונכים או אלכסון חוצה
זווית או זוג צלעות סמוכות



תרגילים לדוגמא



דרך הישר עמ' 58, ת. 67

על כל צלע של מקבילית
בונים רבוע כלפי חוץ.
הוכח:

- א. מרכזי ארבעת ריבועים
האלה הם קודקודי ריבוע
- ב. אלכסוני הריבועים
בסעיף א' ואלכסוני
המקבילית המקורי עוברים
כולם דרך נקודה אחת.

תרגילים לדוגמא

דרך הישר עמ' 59, ת. 73

במשושה משוכלל

ABCDEF הוכח:

א. ABDE מלבן.

ב. AD, BE, CF שווים

וחוצים זה את זה.

ג. נסמן

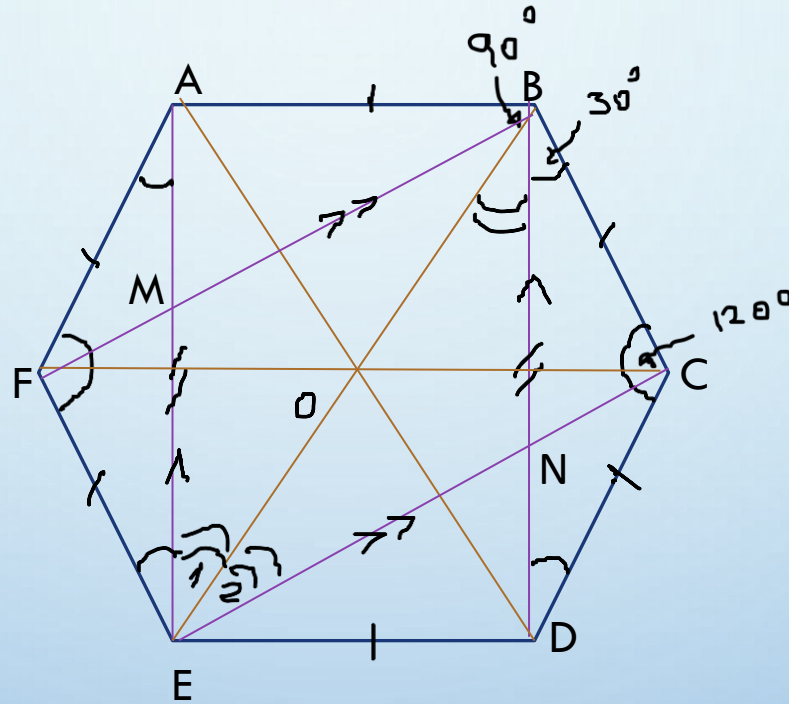
$M = BF \cap AE$, $N = CE \cap BD$

הוכיחו BMEN מעוין

ד. אלכסונים המעוין נחתכים

בנקודת החיתוך של

האלכסונים מסעיף ב'.



ג. ABCD מלבן (א)

לכן ME || BN

FBCE מלבן (כמו א')

לכן MB || EN

לכן MBNE מקבילית.

$\triangle EAB \cong \triangle ECB$ (צ.צ.צ.)

לכן $\angle AEB = \angle CEB$

לכן אלכסון BE חוצה זווית AEC

MBNE מעוין (מקבילית בעלת אלכסון

חוצה זווית)

ד. O מפגש אלכסונים
במלבן ABDE. לכן O אמצע
BE. לכן O מפגש אלכסונים
במעוין MBNE



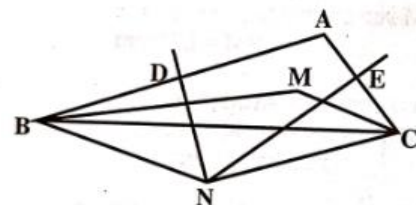
בס"ד

מבדק שבועי בגיאומטריה מס' 4

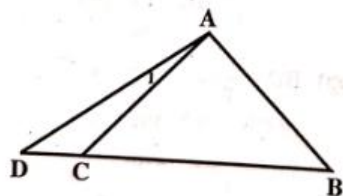
מכינה אוקטובר 2021
כיתה דקל, מרצה גלי קלר

❖ זמן מיועד למבדק: 45 דקות, כולל כתיבה מלאה של הפתרון
❖ כל השרטוטים צריכים להיות על עפרון וסרטל
❖ אין חובה לצורת הכתיבה של הה
❖ כחות אבא חובה להצדיק את כל הטענות על ידי המשפטים או העדויות.

1. נסח והוכח את המשפט ההפוך למשפט הבא: התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר.



2. ND ו-NE הם אנכים אמצעים לצלעות AB ו-AC של המשולש ABC, BM ו-CM הם חוצי זוויות $\angle ABC$ ו- $\angle ACB$.
נתון: $\angle BMC = 160^\circ$.
חשב את הזוויות $\angle A$, $\angle DNE$, $\angle BNC$. נמק.



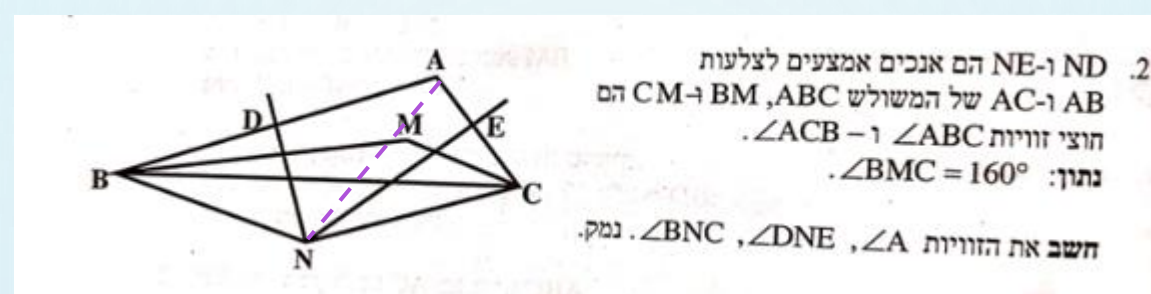
3. $\triangle ABC$ הוא משולש שווה שוקיים וישר זווית ($\angle BAC = 90^\circ$, $AC = AB$).

נתון: $\angle A_1 = \frac{1}{2} \angle D$

הוכח: $BC = AD$.

בהצלחה!

גלי



נימוק	טענה	
נתון BM חוצה זווית, סימון	$\angle ABM = \angle CBM = \beta$	1
נתון CM חוצה זווית, סימון	$\angle ACM = \angle BCM = \gamma$	2
סכום זוויות ב $\triangle BMC$	$\beta + \gamma + \angle BMC = 180^\circ$	3
ע"פ 3 ונתון	$\beta + \gamma = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$	4
סכום זוויות ב $\triangle BAC$	$2\beta + 2\gamma + \angle A = 180^\circ$	5
ע"פ 4, 5	$\angle A = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 180^\circ - 2(\alpha + \beta) = 140^\circ$	6
סכום זוויות במרובע ACND	$\angle A + \angle ADN + \angle AEN + \angle DNE = 360^\circ$	7
ע"פ 6, 7, נתון (אנכים אמצעים), 6	$\angle DNE = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 140^\circ = 40^\circ$	8
בניית עזר	נעביר קטע AN	9
משפט: אנך אמצעי הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מקצוות הקטע, נתון (DN ו-EN אנכים אמצעים)	$BN=AN, NC=AN$	10
במשולש שווה שוקיים ($\triangle BNA$) גובה לבסיס (DN) הוא גם חוצה זווית, סימון	$\angle BND = \angle AND = x$	11
כמו 11, $\triangle CNA$	$\angle CNE = \angle ANE = y$	12
ע"פ 8, 11, 12	$\angle DNE = x + y = 40^\circ$	13
ע"פ 13, 12, 11	$\angle BNC = 2x + 2y = 2(x + y) = 80^\circ$	14

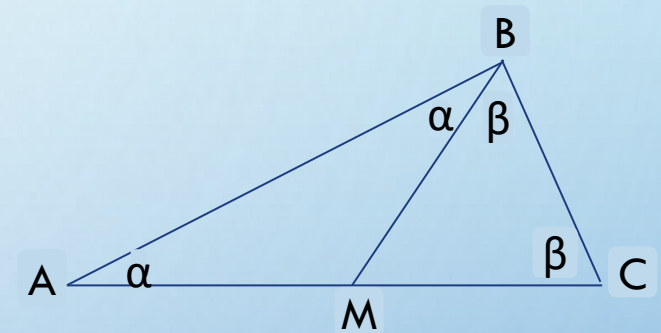


פתרון למבדק רביעי

1. נסת והוכח את המשפט ההפוך למשפט הבא: התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר.

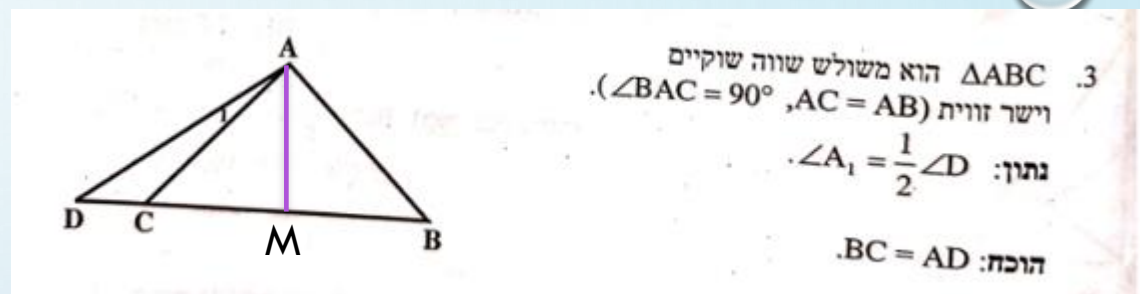
אם במשולש תיכון שווה למחצית הצע שאותה הוא חוצה אז המשולש הוא ישר זווית

נימוק	טענה	
נתון BM תיכון	$AM=MC=\frac{1}{2}AC$	1
נתון	$BM=\frac{1}{2}AC$	2
ע"פ 1,2	$BM=AM$	3
במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות (ΔABM), סימון	$\angle A = \angle ABM = \alpha$	4
ע"פ 1,2	$CM=BM$	5
כמו 4	$\angle C = \angle CBM = \beta$	6
סכום זוויות במשולש (ΔABC), 4,6	$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$	7
7	$\alpha + \beta = 90^\circ$	8
4,6,8	$\angle ABC = 90^\circ$	9
	מ.ש.ל.	



נתון: ΔABC
BM תיכון
 $BM = \frac{1}{2}AC$
צ.ל. $\therefore \angle ABC = 90^\circ$

פתרון למבדק רביעי



נימוק	טענה	
זווית חיצונית למשולש שווה לסכום של שתי זוויות פנימיות הלא צמודות לה (ΔADC)	$\angle ACB = \angle DAC + \angle D$	1
זוויות בסיס במשולש שווה שוקיים שוות זו לזו, סכום זוויות במשולש (ΔABC)	$\angle ACB = \angle ABC = 45^\circ$	2
1,2	$\angle DAC + \angle D = 45^\circ$	3
3, נתון	$\frac{1}{2} \angle D + \angle D = 45^\circ$	4
4,6,8	$\angle D = 30^\circ$	5
בניית עזר	נוריד $AM \perp BC$	6
משפט: במשולש ישר זווית (ΔAMD) ניצב שנמצא מול זווית בת 30° שווה למחצית היתר, 5,6	$AM = \frac{1}{2} AD$	7
במשולש שווה שוקיים (ΔABC) גובה לבסיס הוא גם תיכון, נתון, 6	AM תיכון ב ΔABC	8
משפט: תיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר	$AM = \frac{1}{2} CB$	9
7,9	$CB = AD$	10
	מ.ש.ל.	11

IV. משולשים ומרחביים - תרגילים

1. במשולש ABC את הצלע AC האריכו לשני הכיוונים

כך ש- $AE = AB$, $CD = BC$.

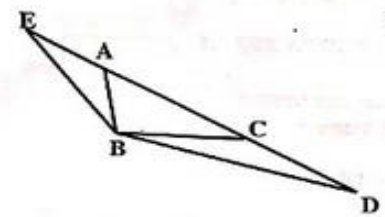
נתון: $\angle ABC = 100^\circ$.

א. הוכח: $\angle EBD = 140^\circ$.

ב. מבלי להסתמך על הנתון $\angle ABC = 100^\circ$

חשב מה צריך להיות גודלה של $\angle ABC$

כדי שיתקיים: $\angle EBD = 1.5 \angle ABC$



תשובה: 90° .

2. AD הוא גובה ליתר במשולש ישר זווית ABC ($\angle A = 90^\circ$).

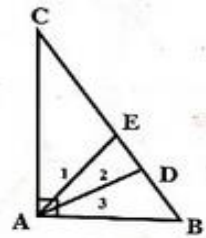
AE - חוצה זווית BAC, הוכח: $\angle A_2 = \frac{1}{2} \angle C$

נתון: $\angle A_2 = \frac{1}{2} \angle C$

א. חשב את $\angle C$

ב. הוכח: $BD = \frac{1}{3} DC$

תשובה: א. 30°



3. BN הוא תיכון ל-AC במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$).

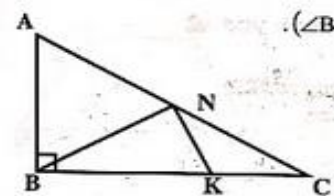
נתון: $KN \perp BN$, $KN = CK$.

א. הוכח: $\angle C = \frac{1}{2} \angle NBA$

ב. נתון: $BC = 21$ ס"מ.

חשב את BK.

תשובה: ב. 14 ס"מ.

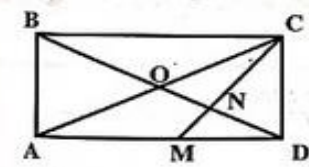


4. על הצלע AD של המלבן ABCD נמצאת נקודה M כך ש- $MD = CD$, $AM = MC$.

הוכח: א. $\angle COD = \angle CMD$

ב. $CN = AB$

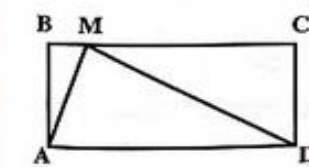
ג. $\angle CND = 1.5 \angle CMD$



5. במלבן ABCD נתון: $\angle AMB = \angle AMD$, $AD = 2AB$

חשב את זוויות המשולש AMD.

תשובה: $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$.

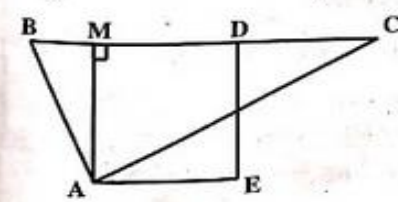


6. נתון: AM הוא גובה ליתר במשולש ישר זווית ABC - ריבוע.

היקף הריבוע AMDE שווה להיתר BC.

מצא את גודל זוויות המשולש ABC.

תשובה: $15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$.



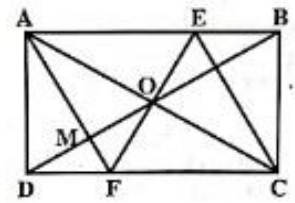
מ ר י ת ג י מ

7. O היא נקודת מפגש אלכסונים במלבן ABCD. הקטע EF שובר דרך הנקודה O ומאונך ל-AC.

א. הוכח: AECF - מעוין.

ב. נתון: $AF \perp DB$

הוכח: $MF = \frac{1}{3} AM$

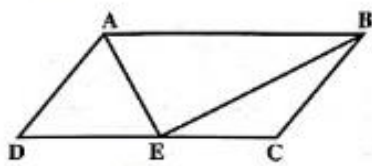


8. נקודה E היא אמצע הצלע DC במקבילית ABCD.

נתון: $AE \perp EB$

הוכח: $AB = 2BC$

לפט: בניית עזר.



9. במקבילית ABCD נתון:

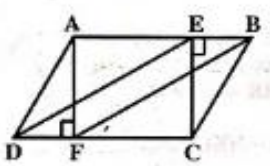
$AF \perp DC$, $CE \perp AB$

א. הוכח: המרובע EBFD הוא מקבילית.

ב. נתון: $AD = AE = 10$ ס"מ.

היקף המקבילית ABCD הוא 50 ס"מ.

חשב את זוויות המקבילית EBFD.



תשובה: $30^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 150^\circ$

10. AE ו- CF הם גבהים במקבילית ABCD

$(CF \perp AB, AE \perp DC)$

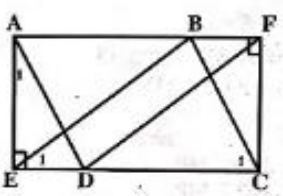
א. הוכח: BFDE הוא מקבילית.

ב. נתון: $\angle E_1 = \angle A_1 = \frac{1}{2} \angle C_1$

$\angle E_1 = \angle A_1 = \frac{1}{2} \angle C_1$

$ED = 6$ ס"מ

חשב את היקף המקבילית ABCD.

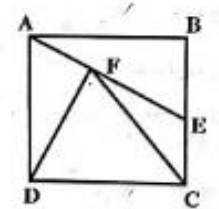


תשובה: 60 ס"מ.

11. מרובע ABCD הוא ריבוע.

נתון: E - אמצע BC, $DF \perp AE$

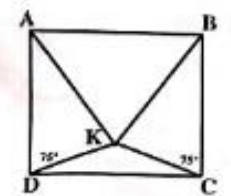
הוכח: $AB = CF$



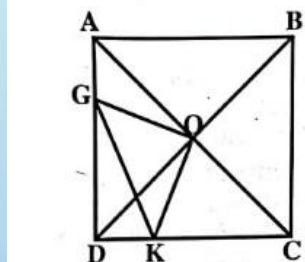
12. מרובע ABCD הוא ריבוע.

נתון: $\angle KCB = \angle KDA = 75^\circ$, $AK = BK$

הוכח: משולש $\triangle AKB$ הוא שווה צלעות.



מאת ד"ר יוסי גל



18. בריבוע ABCD נתון: $CK = DG$.

הוכח:

- א. GKO הוא משולש שווה שוקיים וישר זווית.
ב. $\angle AOG = \angle KGD$.

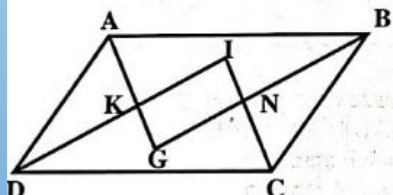
19. במעוין ABCD נתון:

$$\angle CAM = \angle ACF = \alpha$$

$$\alpha = 1.5\beta, \angle BAE = \angle ABC = \beta$$

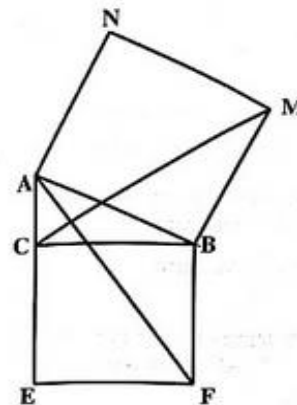
- א. הוכח: AECF – ריבוע.
ב. נתון: $AM = n, AE = m$.
הבע באמצעות m ו-n את היקף המעוין ABCD.

תשובה: ב. $12n - 8m$.



20. AG, CI, BG, DI הם חוצי זוויות במקבילית ABCD.

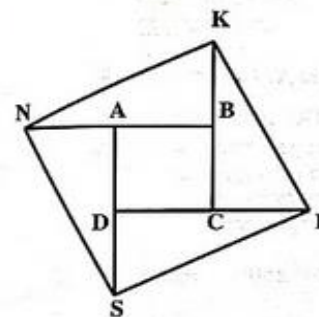
- א. הוכח: המרובע KING הוא מלבן.
ב. איזה תנאי צריכה לקיים המקבילית ABCD כדי שהמלבן KING יהיה ריבוע? נמק.



13. על הצלעות AB ו-BC של משולש ABC בונים ריבועים ABMN ו-BCEF.

הוכח:

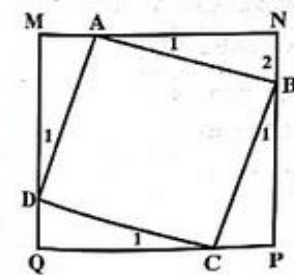
- א. $CM = AF$.
ב. $CM \perp AF$.



14. נתון: על המשי צלעותיו של ריבוע ABCD מקצים ארבעה קטעים שווים:

$$AN = BK = CL = DS$$

הוכח: NKLS – ריבוע.



15. בריבוע ABCD נתון: $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = \angle D_1$.

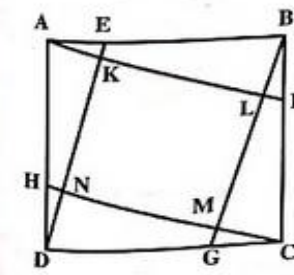
הוכח:

- א. $NQ = MP$.
ב. $NQ \perp MP$.

ג. נתון: $DQ = m, \angle A_1 = \frac{1}{2} \angle B_2$.

הבע באמצעות m את היקף הריבוע ABCD.

תשובה: ג. $8m$.



16. בריבוע ABCD נתון:

$$AE = BF = CG = DH \text{ (ראה ציור).}$$

- א. הוכח: KLMN – ריבוע.
ב. נתון: $AE = BE$.

$$MN = \frac{2}{5} CH$$

הצעה לפתרון: היעור בתכונת קטע אמצע במשולש.

17. על צלעותיו של ריבוע ABCD מחוץ לו בנויים ארבעה ריבועים. הוכח כי מרכז הריבועים מהווים קודקודים של ריבוע.

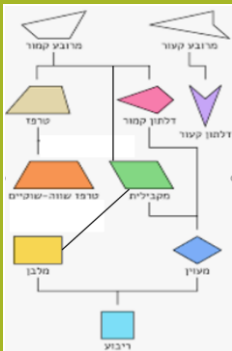
גיאומטריה

מכינה 2025

יחידה חמישית (טרפז, קטע
אמצעים)

נלי קלר

© כל הזכויות שמורות לנלי קלר



משפט:

בטרפז שווה שוקיים

מתקיים:

❖ זוויות שליד אותו

בסיס שוות זו לזו

❖ אלכסונים שווים זה

לזה

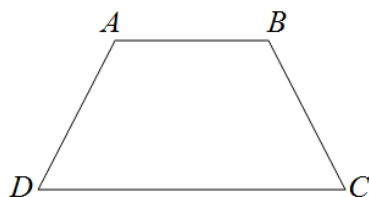
❖ אלכסונים נחתכים

כך שחלקיהם ליד

אותו בסיס שווים זה

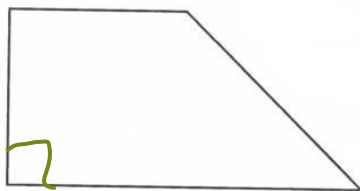
לזה

הטרפז



$$AB \parallel DC$$

$$AD = BC$$



הגדרה: טרפז הוא מרובע בעל

זוג צלעות נגדיות מקבילות וזוג

צלעות נגדיות לא מקבילות

הגדרה: טרפז שווה שוקיים

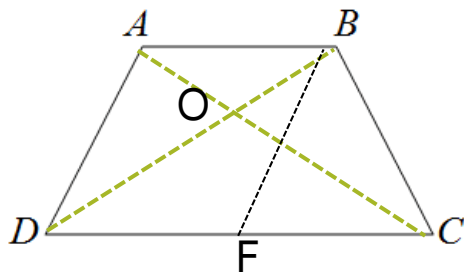
הוא טרפז שהצלעות הלא

מקבילות שלו שוות.

הגדרה: טרפז ישר זווית הוא

טרפז בעל זווית ישרה

הסרפז



הוכחה

1. נעביר דרך נקודה B ישר ממקבל ל AD. נסמן F – נקודת החיתוך שלו עם ההמשך של DC.
2. $AB \parallel FD, AD \parallel BF$ לכן ABFD מקבילית
3. $AD=BF$ כי צלעות נגדיות של המקבילית שוות זו לזו
4. $AD=BC$ על פי הנתון
5. $BF=BC$ על פי 3,4
6. $\angle BFC = \angle BCF$ כי במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות, 5 ($\triangle BFC$)
7. $\angle BFC = \angle ADC$ זוויות מתאימות ($AD \parallel BF$, ק"ח DC)
8. $\angle BCD = \angle BCF = \angle BFC = \angle ADC$ על פי 6,7
9. $\angle DAB = 180^\circ - \angle ADC$ זוויות חד צדדיות פנימיות ($AD \parallel BC$, ק"ח DC)
10. $\angle ABC = 180^\circ - \angle BCD$ " " " " " " (" " " ")
11. $\angle ABC = \angle DAB$ ע"פ 9, 8, 10
- מ.ש.ל. א'
12. $\triangle DBC \cong \triangle CAD$ צ.ז.צ: נתון, 8, צלע משותפת
13. $BD=AC$ צ.מ.ב.ח ($\angle BCD = \angle ADC$)
- מ.ש.ל. ב'
14. $\angle ACD = \angle BDC$ ז.מ.ב.ח. ($BC=AD$), 12
15. $OC=DO$ כי במשולש מול זוויות שוות צלעות שוות ($\triangle DOC$), 14
16. $AO=AC-CO=BD-DO=BO$ על פי 13, 15
- מ.ש.ל. ג'

נתון:

ABCD טרפז שו"ש

$$AB \parallel DC, AD=BC$$

צ.ל.:

$$\angle A = \angle B \text{ .} \mathcal{N}$$
$$\angle C = \angle D$$
$$AC=BD \quad .1$$
$$AO = BO \text{ .}\lambda$$

OC=DO

משפט:

בטרפז שווה שוקיים

מתקיימים:

זוויות שליך אאותו

בסיס שוות זו לזו

אלכסונים שווים זה

לזר

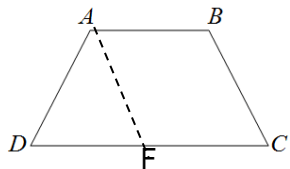
אלכסונים **נחתכים**

כך שחלקיהם ליד

אותו בסיס שווים זה

לזר

❖ אם זוויות ליד אחד הבסיסים של הטרפז שוות זו לזו אז הטרפז הוא שווה שוקיים



נתון:
 ABCD טרפז ($AB \parallel DC$)
 $\angle C = \angle D$
 א.ל.: $AD = BC$

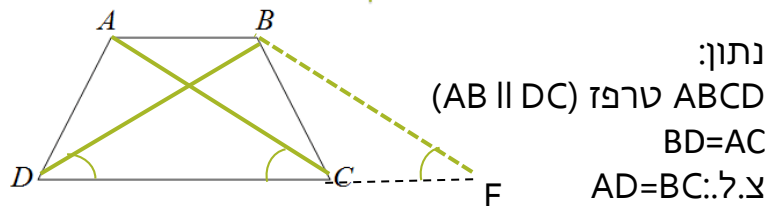
הוכחה:

- נעביר דרך נקודה A ישר ממקבל ל BC. נסמן F – נקודת החיתוך שלו עם ההמשך של DC.
- $AB \parallel FC, AF \parallel BC$ לכן ABCF מקבילית
- $BC = AF$ כי צלעות נגדיות של המקבילית שוות זו לזו
- $\angle AFD = \angle C$ זוויות מתאימות (AF ו-BC, ק"ח DC)
- $\angle D = \angle C$ על פי הנתון
- $\angle AFD = \angle D$, על פי 4,5
- $AF = AD$ כי במשולש ($\triangle DAF$) מול זוויות שוות צלעות שוות,
- $AD = BC$ על פי 3,7
- ABCD טרפז שווה שוקיים על פי ההגדרה מ.ש.ל.

הטרפז

משפטים הפוכים

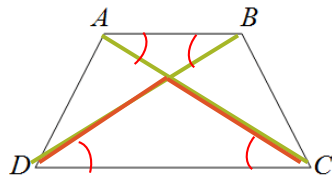
❖ אם אלכסונים של הטרפז שווים זה לזה אז הטרפז הוא שווה שוקיים



נתון:
 ABCD טרפז ($AB \parallel DC$)
 $BD = AC$
 א.ל.: $AD = BC$

הוכחה:

- נעביר דרך נקודה B ישר ממקבל ל AC. נסמן F – נקודת החיתוך שלו עם ההמשך של DC.
- $AB \parallel FC, BF \parallel AC$ לכן ABFC מקבילית
- $BF = AC$ כי צלעות נגדיות של המקבילית שוות זו לזו
- $BD = AC$ על פי הנתון
- $AC = BF$ על פי 3,4
- $\angle F = \angle BDF$ כי במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות,
- $\angle F = \angle ACD$ זוויות מתאימות (AC ו-BF, ק"ח DF)
- $\angle BDC = \angle BDF = \angle ACD$ על פי 6,7
- $\triangle BDC \cong \triangle ACD$ ע"פ צ.ז.צ. ($\angle BDC = \angle ACD, BD = AC, DC = DC$)
- $AD = BC$ צ.מ.ב.ח. ($\angle BDC = \angle ACD$)
- ABCD טרפז שווה שוקיים על פי ההגדרה מ.ש.ל.



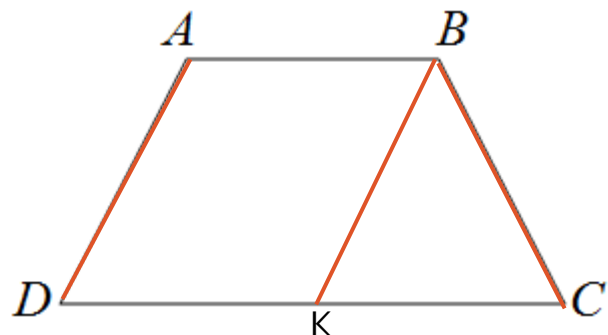
❖ אם שני חלקים של אלכסונים הטרפז הנגזרים ליד אותו בסיס שווים זה לזה אז הטרפז שווה שוקיים

הוכחה נובעת מהמשפט הקודם

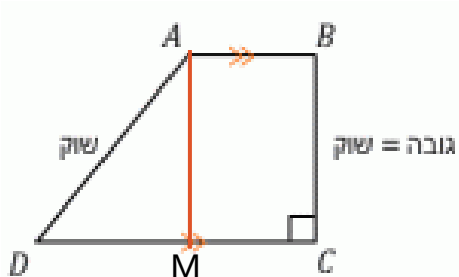
משפטים:

- ❖ אם זוויות ליד אחד הבסיסים של טרפז שוות זו לזו אז הטרפז הוא שווה שוקיים
- ❖ אם אלכסונים של טרפז שווים זה לזה אז הטרפז הוא שווה שוקיים
- ❖ אם שני חלקים של אלכסונים הטרפז שנמצאים ליד אותו בסיס שווים זה לזה אז הטרפז הוא שווה שוקיים

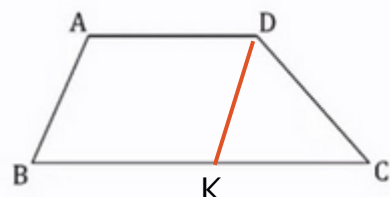
בניות עזר נפוצות



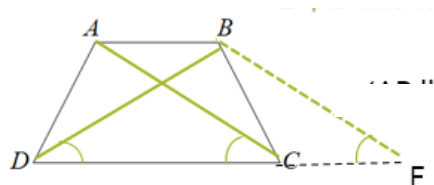
ABCD טרפז שווה שוקיים
ב"ע: מעבירים מהקודקוד
 מקביל לאחת השוקיים: $DK \parallel AB$
תוצאה: $ADKB$ מקבילית,
 $\triangle KBC$ שווה שוקיים



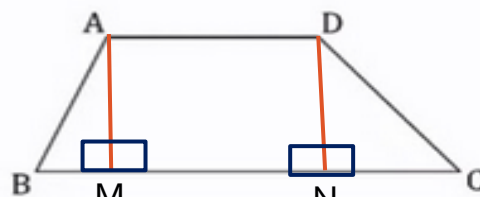
ABCD טרפז ישר זווית
ב"ע: מורידים גובה
תוצאה: $ABCM$ מלבן
 $\triangle AMD$, ישר זווית



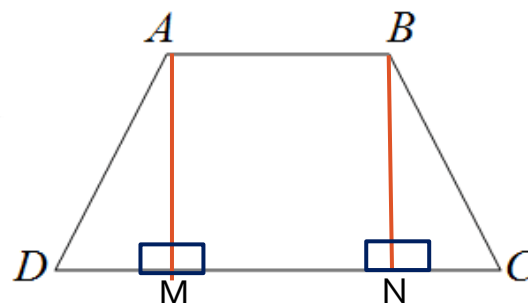
ABCD טרפז כללי
ב"ע: מעבירים מהקודקוד
 מקביל לאחת השוקיים: $DK \parallel AB$
תוצאה: $ADKB$ מקבילית



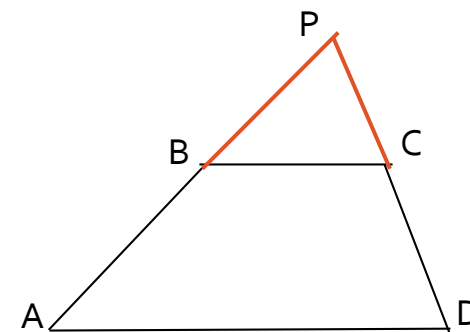
ABCD טרפז שווה שוקיים
ב"ע: מעבירים מהקודקוד
 מקביל לאחת השוקיים: $BF \parallel AC$
תוצאה: $ABFC$ מקבילית,
 $\triangle DBF$ שווה שוקיים



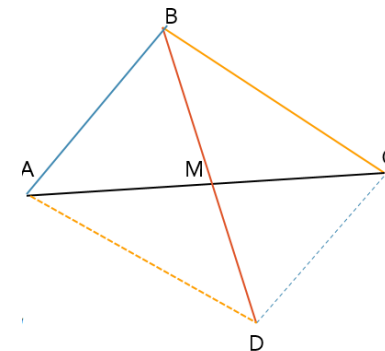
ABCD טרפז כללי
ב"ע: מורידים שני גבהים
תוצאה: $ADNM$ מלבן
 $\triangle DNC, \triangle AMB$ ישר זווית



ABCD טרפז שווה שוקיים
ב"ע: מורידים שני גבהים
תוצאה: $ABNM$ מלבן,
 $\triangle AMD, \triangle BNC$ חופפים, ישר זווית



ABCD טרפז כללי
ב"ע: ממשיכים שתי שוקיים עד המפגש (נק' P)
תוצאה: $\triangle APD$ משולש



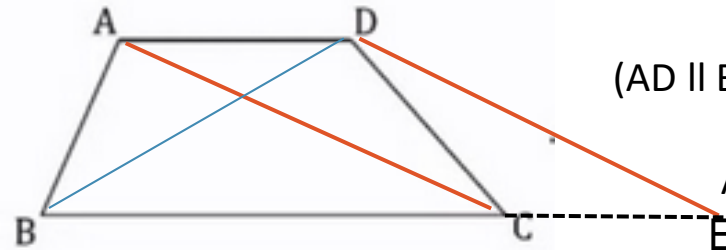
BM תיכון
ב"ע: ממשיכים את התיכון כאורכו
תוצאה: $ABCD$ מקבילית

ש"ב בני גורן עמ' 133, ת. 7,8
 עמ' 134, ת. 11, עמ' 135, ת. 12
 עמ' 136, ת. 17, עמ' 137, ת. 21
 עמ' 138, ת. 26,27



דוגמאות לשימוש בבניות עזר נפוצות

ב. הוכח: בטרפז סכום
אלכסונים גדול מסכום
הבסיסים

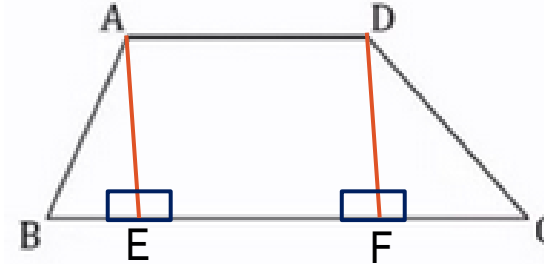


נתון:
ABCD טרפז ($AD \parallel BC$)
צ.ל:
 $AC + BD > AD + BC$

הוכחה:

1. $DE \parallel AC$, $E = DE \cap BC$ (בניית עזר)
 2. $AD \parallel CE$ (טרפז)
 3. ADEC מקבילית (ע"פ 1,2)
 4. $DE = AC$, $CE = AD$ (צלעות נגדיות במקבילית)
 5. $BD + DE > BE$ (אי שוויון המשולש, $\triangle BDE$)
 6. $BD + DE = BD + AC > BE = BC + CE = BC + AD$ (ע"פ 4,5)
 7. $BD + AC > BC + AD$ (ע"פ 6)
- מ.ש.ל.

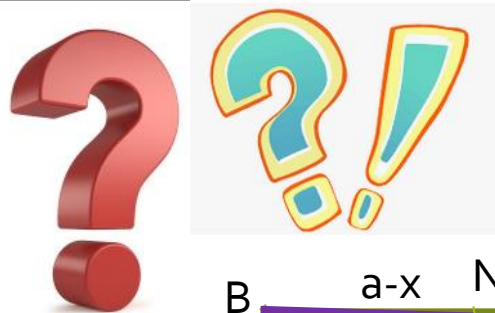
א. הוכח: בטרפז סכום שוקיים
גדול מהפרש הבסיסים



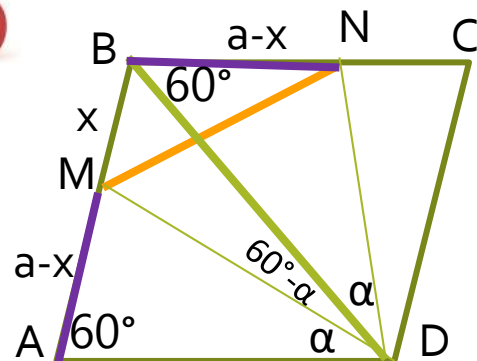
נתון:
ABCD טרפז ($AD \parallel BC$)
צ.ל:
 $AB + CD > BC - AD$

הוכחה:

1. נוריד $AE \perp BC$, $DF \perp BC$ (בניית עזר)
 2. $\triangle ABE$ ($\angle E = 90^\circ$): $AB > BE$ (במשולש מול הזווית הגדולה הצלע הגדולה).
 3. $\triangle DFC$ ($\angle F = 90^\circ$): $DC > CF$ (במשולש מול הזווית הגדולה הצלע הגדולה).
 4. $AB + DC > BE + CF$ (ע"פ 2,3)
 5. $AE \parallel DF$ (אם זוויות מתאימות שוות אז ישרים מקבילים)
 6. $AD \parallel EF$ (טרפז)
 7. ADFE מקבילית (ע"פ 5,6)
 8. $EF = AD$ (צלעות נגדיות במקבילית)
 9. $BE + FC = BC - EF = BC - AD$ (ע"פ 8)
 10. $AB + DC > BC - AD$
- מ.ש.ל.



דוגמאות לשימוש בבניות עזר נפוצות



נתון:

מעוין ABCD

$$\angle A = 60^\circ$$

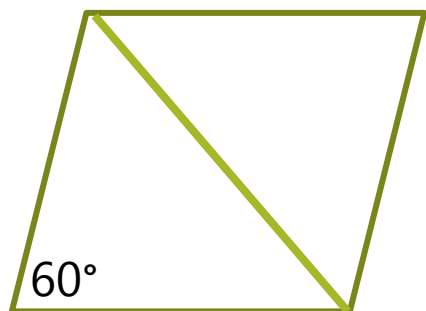
צ.ל.:

$\triangle DMN$ שווה צלעות

$$13. \angle ADB = 60^\circ - \alpha \quad (12, 9)$$

$$14. \angle MDN = 60^\circ - \alpha + \alpha = 60^\circ \quad \text{על פי } 12, 13$$

15. $\triangle MDN$ שווה צלעות על פי 11, 14 (משולש שווה שוקיים עם זווית הראש שווה ל 60°)
מ.ש.ל.



מעוין עם זווית חדה בת 60°

ב"ע: מעבירים אלכסון
תוצאה: מתקבלים
משולשים שווה צלעות

במעוין ABCD שבו $\angle A = 60^\circ$
מעבירים ישר MN החותך מצלעות
המעוין שני קטעים BM ו BN
שסכומם שווה לצלע המעוין.
הוכיחו שמשולש DMN שווה
צלעות.

הוכחה:

1. נעביר אלכסון BD (בניית עזר)
2. $\triangle BAD$ שווה שוקיים ($BD = AB$), צלעות המעוין שוות זו לזו).
3. $\angle ABD = \angle ADB = 60^\circ$ (סכום זוויות במשולש, נתון).
4. $AD = BD = AB$ (במשולש מול זוויות שוות צלעות שוות)
5. נסמן $AB = a$, $BM = x$. על פי הנתון $BN = AM = a - x$
6. נחפוף $\triangle AMD$ ו $\triangle BND$
7. $BN = AM$ (ע"פ 5)
8. $BD = AD$ (ע"פ 4)
9. $\angle MAD = \angle NBD = 60^\circ$ (אלכסונים במעוין חוצי זוויות)
10. $\triangle AMD \cong \triangle BND$ על פי צ.ז.צ.
11. $MD = ND$ צ.מ.ב.ח (60°)
12. $\angle ADM = \angle BDN = \alpha$ (צ.מ.ב.ח. $AM = BN$)

שאלה 3 - 16%

BD ו-CE הם גבהים במשולש חד זווית ושווה שוקיים ABC ($AC=AB$).

חגים מעגל שמרכזו A ורדיוסו AD.

- א. 5% הוכיחו כי BD ו-CE משיקים למעגל זה.
- ב. 5% דרך B ו-C מעבירים משיקים נוספים למעגל, BF ו-CG (נקודות השקה F, G). הוכיחו:
1. 5% DEFG הוא טרפז שווה שוקיים.
2. 6% $EF = DE = GD$.

שאלה 6 - 18%

במשולש ABC מעבירים את חוצי הזוויות AK, BL ומסמנים $N = AK \cap BL$.

הוכיחו:

- א. 9% אם המרובע CKNL הוא בר חסימה במעגל אז $\angle C = 60^\circ$.
- ב. 9% ולהפך, אם $\angle C = 60^\circ$ אז המרובע CKNL הוא בר חסימה במעגל.
- כלומר, המרובע CKNL הוא בר חסימה במעגל אם ורק אם $\angle C = 60^\circ$.

שאלה 3 - 16% יש לפתור בעזרת גיאומטריה של המישור בלבד

בטרפז ABCD נתון כי $\angle A = \angle B = 90^\circ$. בונים מעגל שקוטרו CD, החותך את AB ב-E, F.

- א. 5% הוכיחו כי אנך אמצעי ל-AB עובר דרך מרכז המעגל.
- ב. 5% הוכיחו כי $AE = BF$.
- ג. 6% נתון נוסף לסעיף זה בלבד: $BC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}CD = 1$. חשבו את שטח הטרפז.

שאלה 6 - 18% יש לפתור בעזרת גיאומטריה של המישור בלבד

במחומש ABCDE נתון: $\angle E = \angle C = 90^\circ$, $DC = BC$, $AE = DE$, H אמצע AB.

מסמנים ב-M, N את אמצעי AD, BD בהתאמה. הוכיחו:

- א. 9% המשולשים EMH, HNC חופפים.
- ב. 9% המשולש CEH הוא ישר זווית ושווה שוקיים.

שאלה 3 - 16% יש לפתור בעזרת גיאומטריה של המישור בלבד

- א. 6% הוכיחו כי קטע האמצעים בטרפז חוצה את האלכסונים.
- ב. 10% בטרפז $ABCD$ (AB הבסיס הגדול) מסמנים ב- K, M את אמצעי BD, AC בהתאמה ונתון כי $DM \parallel CK$. הוכיחו כי האלכסונים בטרפז $ABCD$ מחלקים זה את זה ביחס 3:1.

שאלה 6 - 18% יש לפתור בעזרת גיאומטריה של המישור בלבד

- א. 6% נתון המשפט: "במשולש ישר זווית, בעל זווית חדה 30° , הניצב מול זווית זו שווה לחצי היתר". נסחו והוכיחו משפט הפוך.
- ב. מקודקוד זווית חדה A במעוין $ABCD$ מורידים אנכים AF ו- AE להמשכי הצלעות BC ו- CD בהתאמה. נתון $EF = 3\sqrt{3}$, $AF = 3$.
- (1) 4% הוכיחו כי $EF \parallel BD$.
 - (2) 4% מצאו את זוויות המעוין.
 - (3) 4% חשבו את אורכי האלכסונים של המעוין.

שאלה 3 - 16%

במעגל שמרכזו O מעבירים קוטר AB ושני מיתרים AC ו- BD ומסמנים $N = AC \cap BD$, Q מרכז המעגל החוסם את $\triangle CND$.

- א. הוכיחו כי $\angle DQN = 2\angle OBN$. 6%
- ב. הוכיחו כי OD משיק למעגל שמרכזו Q . 6%
- ג. האם המרובע $ODQC$ בר חסימה במעגל? הוכיחו או הפריכו. 4%

שאלה 6 - 18%

על הישר ℓ נתונות שתי נקודות A ו- B . מחוץ ל- ℓ בוחרים נקודה C כך שהמשולש ABC הוא חד זווית. על הצלעות AC ו- BC בונים כלפי חוץ ריבועים AA_1EC , BB_1DC . נסמן ב- A_2, B_2, H את היטלי הקודקודים C, A_1, B_1 , בהתאמה, על הישר ℓ .

- א. הוכיחו כי $AA_2 = BB_2 = CH$. 8%
- ב. הוכיחו כי הסכום $A_1A_2 + B_1B_2$ תלוי באורך הקטע AB בלבד. 6%
- ג. (משפט Bottema) הוכיחו כי אמצע הקטע A_1B_1 נמצא באותה נקודה לכל בחירה של הנקודה C , או במילים אחרות, אמצע הקטע A_1B_1 הוא נקודה קבועה, התלויה רק בקטע AB ולא במיקום הקודקוד C . 4%

שאלה 3 - 30%

דרך אמצע הקטע AB מעבירים שני ישרים המאונכים זה לזה, x ו- y . דרך A מעבירים קטע CF, המאונך ל-AB, כך ש- $F \in y$, $C \in x$ ודרך B מעבירים קטע DE, המאונך ל-AB, כך ש- $E \in y$, $D \in x$.

- א. 4% שרטטו את נתוני השאלה.
 ב. 10% הוכיחו כי $CF = FD$
 ג. 8% הוכיחו כי $FD = AF + BD$
 ד. 8% הוכיחו כי מעגל שקוטרו AB משיק לישר FD בנקודה M, עבורה מתקיים $AF = FM$.

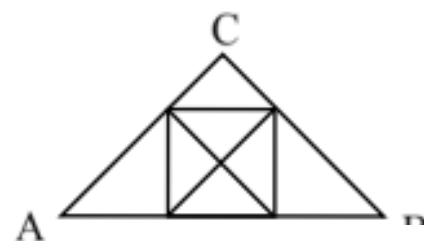
שאלה 3 - 30%

מרובע ABCD, שאלכסוניו מאונכים ונחתכים ב-H, חסום במעגל. מעבירים קטע TK, המאונך ל-BC, כך ש- $T \in BC$, $K \in AD$, $H \in TK$.

- א. 4% שרטטו את נתוני השאלה.
 ב. 8% הוכיחו כי המשולש AHK הוא שווה שוקיים.
 ג. 8% הוכיחו כי הנקודה K היא אמצע AD.
 ד. 10% מעבירים קטע NL המאונך ל-CD כך ש- $N \in AB$, $L \in CD$, $H \in NL$. הוכיחו כי BDKN הוא טרפז.

שאלה 3 - 18%

במשולש ABC חסום ריבוע $KLMN$ כך ש- $M, N \in AB$, $K \in AC$, $L \in BC$ ונתון כי $AC \parallel NL$, $BC \parallel KM$.



א. הוכיחו כי $LN = 2KC$. 6%

ב. הוכיחו כי המשולש ABC הוא ישר זווית ושווה שוקיים. 6%

ג. חשבו את שטח הריבוע $KLMN$ כאשר $AB = 24$. 6%

שאלה 3 - 16%

שאלה 3 - 16%

במקבילית $ABCD$, הנקודות S, R, Q, P הן אמצעי הצלעות AD, CD, BC, AB בהתאמה.

נסמן: $K = AQ \cap PD$, $L = AQ \cap BR$, $M = BR \cap CS$, $N = CS \cap PD$.

א. הוכיחו כי $KLMN$ מקבילית. 8%

ב. הוכיחו כי $KL = \frac{2}{5}AQ$. 8%

שאלה 6 - 18%

במשולש ABC מעבירים תיכון CM ($M \in AB$).

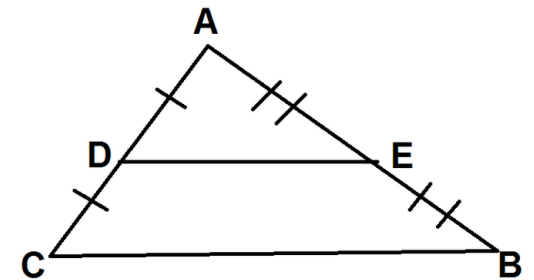
א. הוכיחו כי $AC < BC$ אם ורק אם $\angle ACM > \angle BCM$. 8%

ב. הנקודות L ו- K מחלקות את CM לשלושה קטעים שווים: $CL = LK = KM$. 10%

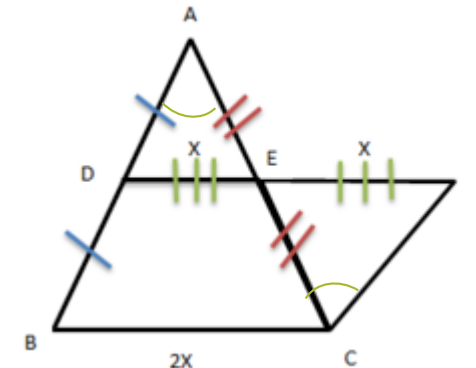
נסמן חיתוך ישרים: $T = AL \cap BF$, $F = AC \cap BK$. הוכיחו כי $\frac{TF}{BF} = \frac{1}{9}$.

קטע אמצעים במשולש

הגדרה: קטע אמצעים במשולש הוא קטע שמחבר בין אמצעי צלעות המשולש



משפט: קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית שלו ושווה למחציתה

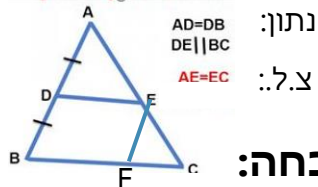


נתון:
 $\triangle ABC$
 DE קטע אמצעים
 צ.ל.:
 א. $DE \parallel BC$
 ב. $BC = 2DE$

נימוק	טענה	
ב"ע	נמשיך DE כאורכו כך ש $DE = EF$, נעביר קטע CF	1
	נחפוף $\triangle FCE \mid \triangle DAE$	2
1	$EF = DE$	
קודקודיות	$\angle DEA = \angle FEC$	
נתון	$EC = AE$	
צ.ז.צ.	$\triangle FCE \cong \triangle DAE$	
צ.מ.ב.ח. ($\angle E$)	$DA = CF$	3
נתון	$DA = DB$	4
3,4	$DB = CF$	5
ז.מ.ב.ח. ($EF = DE$)	$\angle A = \angle FCE$	6
אם זוויות מתחלפות שוות הישרים מקבילים	$AB \parallel FC$	7
7,5	$DB \parallel = CF$	8
מרובע בעל זוג צלעות מקבילות ושוות	DFCB מקבילית	9
צלעות נגדיות במקבילית	$DE \parallel BC \leftarrow DF \parallel BC$	10
1, צלעות נגדיות במקבילית שוות	$2DE = BC \leftarrow 2DE = DF = BC$ מ.ש.ל	11

קטע שיוצא מאמצע הצלע של המשולש לצלע שממול ומקביל לצלע השלישית הוא קטע

אמצעים

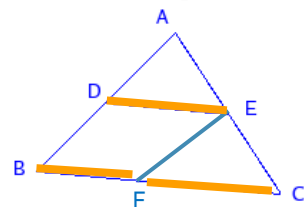


הוכחה:

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר EF ו-AB (F=BC)	1
1, נתון, הגדרה	DE BF, BD EF לכן DEF B מקבילית	2
צלעות נגדיות במקבילית	EF=BD	3
נתון	AD=BD	4
3,4	AD=EF	5
זוויות מתאימות (AC DE, ק"ח"א)	$\angle AED = \angle C$	6
זוויות מתאימות (BC DE, ק"ח"א)	$\angle ADE = \angle ABC$	7
זוויות מתאימות (AC DE, ק"ח"א)	$\angle EFC = \angle ABC$	8
7,8	$\angle EFC = \angle ADE$	9
8,9 סכום זוויות במשולש	$\angle A = \angle FEC$	10
10,5,9, צ.ז.צ.	$\triangle ADE \cong \triangle EFC$	11
צ.מ.ב.ח (ADE=EF C)	EC=AE	12
	מ.ש.ל	

קטע אמצעים במשולש משפטים הפוכים

קטע שמחבר בין הצלעות של המשולש ומקביל לצלע השלישית הוא קטע אמצעים



קטע אמצעים

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר FE ו-AB	1
1, נתון	EF ו-BD, BF ו-DE	2
1, הגדרה	BDEF מקבילית	3
צלעות נגדיות במקבילית	EF = BD, BF = DE	4
נתון, 4	$BF = DE = \frac{1}{2}BC$	5
4, 5, נתון	$FC = BC - BF = BC - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BC = DE$	6
זוויות בין שתי זוגות של ישרים מקבילים (FC DE, EF AD)	$\angle ADE = \angle EFC$	7
זוויות מתאימות (AC DE, ק"ח"א)	$\angle AED = \angle C$	8
7,6,8, צ.ז.צ.	$\triangle ADE \cong \triangle EFC$	9
צ.מ.ב.ח. (ADE=EF C)	AE=EC	10
צ.מ.ב.ח. (ADE=EF C)	AD=EF	11
4,11	BD=AD מ.ש.ל	12

משפטים:

- קטע שיוצא מאמצע הצלע של המשולש לצלע שממול ומקביל לצלע השלישית הוא קטע אמצעים
- קטע שמחבר בין הצלעות של המשולש ומקביל לצלע השלישית הוא קטע אמצעים

טענה לא נכונה:

- קטע שיוצא מאמצע הצלע לצלע שממול ושווה למחצית הצלע השלישית הוא קטע אמצעים

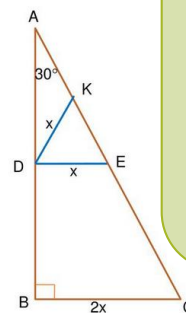
דוגמא נגדית: ניקח משולש ישר זווית עם זווית בת 30°

אם DE קטע אמצעים אז: $DE = \frac{1}{2}BC = x$

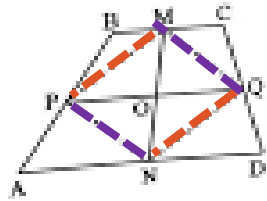
$AE = 2DE = 2x$ (ניצב שמול זווית בת 30° במשולש ישר זווית). נעביר תיכון ליתר DK במשולש ישר זווית ADE.

$$DK = \frac{1}{2}AE = x$$

לכן DK יוצא מאמצע הצלע שממול, שווה למחצית הצלע השלישית אבל לא קטע אמצעים

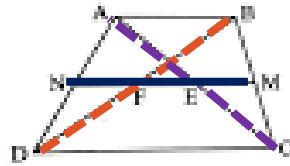


תכונות מעניינות של טרפז שדורשות הוכחה



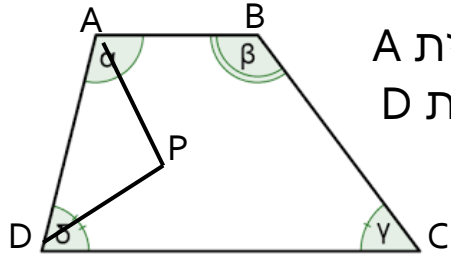
$$PM = \parallel NQ$$

$$PN = \parallel MQ$$



$$DF = FB$$

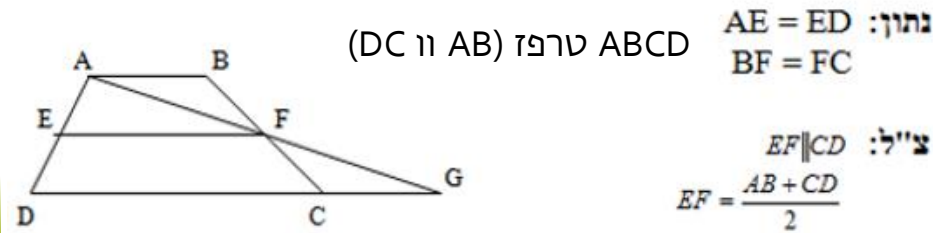
$$CE = AE$$



AP חוצה זווית A
DP חוצה זווית D
 $\angle APD = 90^\circ$

8. EF קטע אמצעים ב $\triangle DAG$ (על פי נתון 6)
9. $EF \parallel DG$, $EF = \frac{1}{2}DG$ (על פי משפט על קטע אמצעים במשולש)
10. $EF \parallel DC \parallel AB$ (על פי 9, הגדרת הטרפז מ.ש.ל. א')
11. $DG = DC + CG = DC + AB$ (על פי 7)
12. $EF = \frac{AB + CD}{2}$ (ע"פ 9, 11) מ.ש.ל. ב')

קטע אמצעים בטרפז



נתון: $AE = ED$
 $BF = FC$

$$EF \parallel CD$$

$$EF = \frac{AB + CD}{2}$$

הוכחה:

בניית עזר: נחבר את נקודה A עם נקודה F ונארך את הקטע AF עד שיחתוך את המשיך DC בנקודה G.
(נחפוף תחילה את המשולשים ABF ו- CGF ואח"כ נייעזר בתכונות של קטע אמצעים במשולש).

1. $AB \parallel DC$ (נתון ABCD טרפז ש- AB ו- CD הם בסיסיו).

$\Downarrow$

2. $\angle B = \angle FCG$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים שוות זו לזו).

3. $BF = CF$ (נתון)

4. $\angle AFB = \angle GFC$ (זוויות קודקודיות שוות זו לזו).

$\Downarrow$

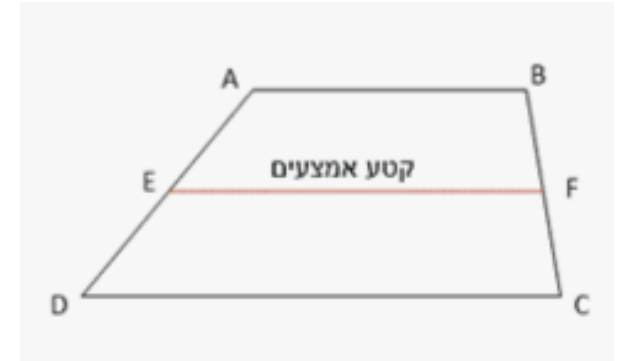
5. $\triangle ABF \cong \triangle GCF$ (עפ"י משפט חפיפה ז.ז.ז.).

$\Downarrow$

6. $AF = GF$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות זו לזו)

7. $AB = CG$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות זו לזו)

הגדרה: קטע אמצעים בטרפז
הוא קטע שמחבר בין אמצעי
השוקיים של טרפז

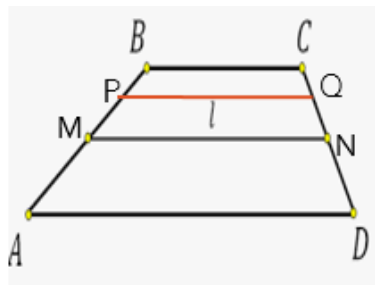


משפט: קטע אמצעים בטרפז
מקביל לבסיסים ושווה
למחצית הסכום שלהם

קטע אמצעים בטרפז

משפטים הפוכים

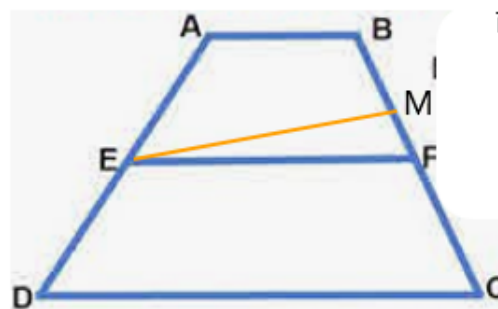
❖ קטע שמחבר בין שוקי הטרפז, מקביל לבסיס ושווה למחצית הסכום של הבסיסים הוא קטע אמצעים



נתון: ABCD טרפז
AD || BC
 $l = \frac{AD + BC}{2}$
MN || AD
צ.ל.: MN ק"א
הוכחה:

נניח בשלילה ש MN לא קטע אמצעים.
אם כך אז M לא אמצע AB ו N לא אמצע CD.
אחרת MN הוא ק"א ע"פ המשפט: קטע שיוצא מאמצע השוק ומקביל לבסיס הטרפז הוא ק"א.
אם MN לא ק"א אז קיים ק"א אחר שהקצוות שלו לא מתלכדות עם הקצוות של MN. נקרא לו PQ.
 $PQ = \frac{AD + BC}{2}$ ו AD || PQ כי הוא ק"א ברפז.
AD || MN ו $MN = \frac{AD + BC}{2}$ ע"פ הנתון
אם כך אז PQNM מקבילית ו MP ו QN. זה בלתי אפשרי כי הם שייכים לשוקיים הטרפז שלא מקבילים על פי ההגדרה.
לכן ההנחה לא נכונה ו MN קטע אמצעים.

❖ קטע שיוצא מאמצע השוק של טרפז לשוק השנייה ומקביל לבסיס הטרפז הוא קטע אמצעים



נתון: ABCD טרפז
(CD || AB)
EA = DE
EF || DC
צ.ל.: FC = BF

הוכחה:
1. נניח בשלילה שנקודה F היא לא אמצע BC. אם כך אז קיימת נקודה אחרת M שהיא אמצע BC.
נעביר קטע EM.
2. על פי הנתון E אמצע AD, על פי ההנחה M אמצע BC.
אם כך אז EM קטע אמצעים בטרפז ABCD.
3. EM || DC על פי המשפט: ק"א בטרפז מקביל לבסיס.
4. EF || DC על פי הנתון.
סתירה! כי דרך נקודה מחוץ לישר עובר רק ישר אחד שמקביל לו.
לכן ההנחה לא נכונה ו F אמצע BC.

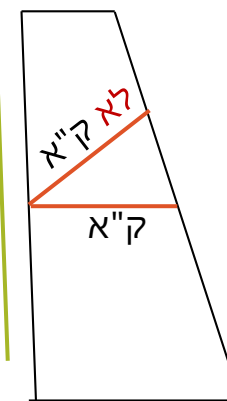
משפטים:

❖ קטע שיוצא מאמצע השוק של טרפז לשוק השנייה ומקביל לבסיס הטרפז הוא קטע אמצעים

❖ קטע שמחבר בין שוקי הטרפז, מקביל לבסיס ושווה למחצית הסכום של הבסיסים הוא קטע אמצעים

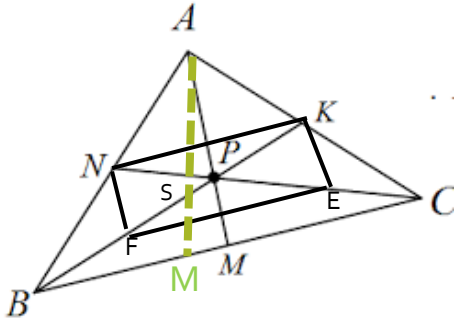
טענה לא נכונה:

❖ קטע שיוצא מאמצע השוק של הטרפז לשוק השנייה ושווה למחצית הסכום של הבסיסים הוא קטע אמצעים



ש"ב בני גורן עמ' 141, ת.
עמ' 143, ת. 13-16
עמ' 149, ת. 37

נקודת מפגש התיכונים במשולש



נתון:
 $\triangle ABC$
 CN, BK, AM – תיכונים
 $P = BK \cap CN$
 צ.ל.:
 א. $P \in AM$
 ב. $AP = 2PM$
 $BP = 2PK$
 $CP = 2PN$

משפט:

שלושה תיכונים של
 המשולש נפגשים
 בנקודה אחת
 שמחלקת כל אחד
 מהם ביחס 2:1
 מקודקוד המשולש

11. נניח בשלילה ש AM לא עובר דרך נקודה P. נסמן $S = AM \cap AK$
12. $BS = 2SK$ (כמו 1-10 עבור התיכונים $(BK \cap AM)$)
13. $BP = 2PK$ (על פי 10) סתירה! כי בלתי אפשרי ששתי נקודות שונות מחלקות אותו קטע (BK) באותו יחס (2:1) באותו כיוון.
- לכן ההנחה לא נכונה ו AM עובר דרך נקודה P. זה אומר ששלושה תיכונים נפגשים בנקודה אחת (P) שמחלקת כל אחד מהם ביחס 2:1 (1-10) מ.ש.ל.

נימוק	טענה	
ב"ע	נסמן F אמצע BP, E אמצע CP	1
ב"ע	נעביר קטעים FN, EF, KE, NK	2
תיכונים CN, BK	K אמצע AC, N אמצע AB	3
KN ק"א ב $\triangle BAC$, 3	$KN \parallel BC$, $KN = \frac{1}{2}BC$	4
EF ק"א ב $\triangle BPC$, 1	$EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2}BC$	5
4, 5	$NK = EF$	6
מרובע בעל זוג צלעות שוות ומקבילות	NKEF מקבילית	7
אלכסונים במקבילית חוצים זה את זה	$NP = PE$, $FP = PK$	8
1, 8	$PC = 2PE = 2PN$	9
1, 8	$BP = 2PF = 2PK$	10

נקודת מפגש התיכונים במשולש

משפטים הפוכים

❖ אם שני קטעים שיוצאים

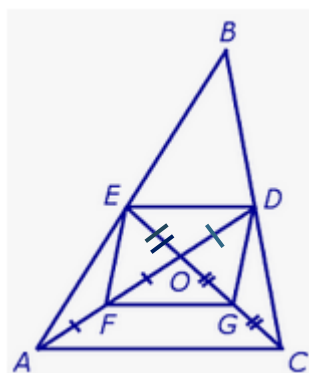
מקודקודי המשולש

לצלעות שממול

מחלקים אחד את השני

ביחס 2:1 מהקודקוד אז

הקטעים הם תיכונים



נתון:

$\triangle ABC$

$E \in AB, D \in BC$

$O = AD \cap CE$

$AO = 2OD$

$CO = 2OE$

צ.ל. AD, CE תיכונים

נימוק	טענה	
ב"ע	נסמן F אמצע AO, G אמצע CO	1
ב"ע	נעביר קטעים FE, ED, DG, GF	2
נתון, 1	$GC = OG = EO$	3
נתון, 1	$FA = OF = DO$	4
מרובע בעל אלכסונים חוצים זה את זה	EDGF מקבילית	5
צלעות נגדיות במקבילית	$FG \parallel ED$	6
1	FG קטע אמצעים ב $\triangle AOC$	7
ע"פ משפט על ק"א במשולש	$FG \parallel AC, FG = \frac{1}{2}AC$	8
6,8	$ED \parallel AC, ED = \frac{1}{2}AC$	9
ע"פ משפט הפוך למשפט על ק"א במשולש, 9	ED קטע אמצעים ב $\triangle ABC$	10
10	D אמצע BC, E אמצע AB	11
11	AD, CE תיכונים	12
	מ.ש.ל.	

משפטים:

❖ אם שני קטעים שיוצאים מקודקודי

המשולש לצלעות שממול מחלקים

אחד את השני ביחס 2:1 מהקודקוד

אז הקטעים הם תיכונים

❖ אם קטע שיוצא מקודקוד המשולש

לצלע שממול מחלק את התיכון

ביחס 2:1 מהקודקוד אז גם הקטע

הוא תיכון.

❖ אם תיכון מחלק קטע שיוצא

מקודקוד המשולש לצלע שממול

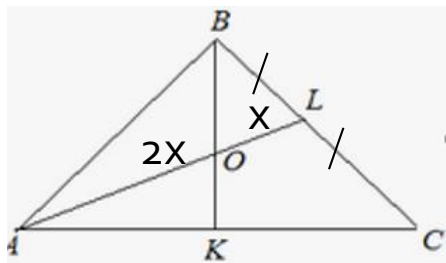
2:1 מהקודקוד אז גם הקטע הוא

תיכון.

נקודת מפגש התיכונים במשולש

משפטים הפוכים

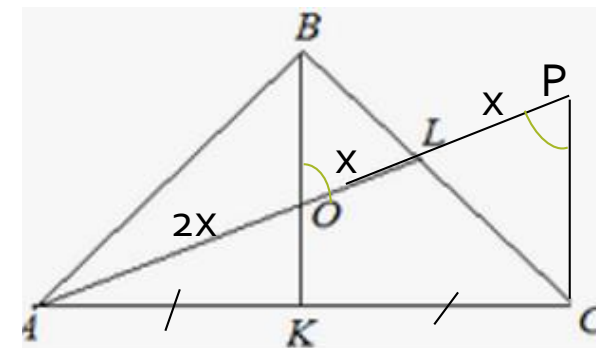
❖ אם קטע שיוצא מקודקוד המשולש לצלע שממול מחלק את התיכון ביחס 2:1 מהקודקוד אז גם הקטע הוא תיכון.



נקודה מחלקת את התיכון ביחס 2:1 מהקודקוד לכן היא נקודת מפגש התיכונים. לכן קטע שיוצא מהקודקוד ועובר דרך נקודה זו הוא תיכון.

נימוק	טענה	
ב"ע	נמשיך את AL כך ש $LO=LP$	1
ב"ע	נעביר קטע PC	2
נתון, 1	$OP=AO$	3
נתון (BK תיכון)	$KC=AK$	4
3,4	OK קטע אמצעים ב $\triangle APC$	5
ע"פ משפט על ק"א במשולש	$OK \parallel PC, OK = \frac{1}{2}PC$	6
	נחפוף $\triangle LOB$ ו $\triangle LPC$	7
קודקודיות	$\angle BLO = \angle CLP$	
1	$LP=OL$	
זוויות מתחלפות (BK ו PC ק"ח AP), 6	$\angle BOL = \angle P$	
ז.ז.ז	$\triangle BLO \cong \triangle CLP$	
צ.מ.ב.ח. (4L)	$PC=BO$	8
8,6	$BO=2OK$	9
אם קטע שיוצא מקודקוד המשולש לצלע שממול מחלק את התיכון ביחס 2:1 מהקודקוד אז גם הקטע הוא תיכון.	AL תיכון	10
	מ.ש.ל	

❖ אם תיכון מחלק קטע שיוצא מקודקוד המשולש לצלע שממול 2:1 מהקודקוד אז גם הקטע הוא תיכון.

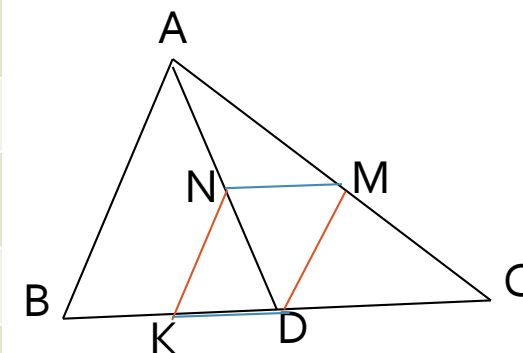


נתון:
 $\triangle ABC$
 $K \in AC, L \in BC$
 $O = AL \cap BK$
 $AO = 2OL$
 BK תיכון
 צ.ל. AL תיכון

תרגילים לדוגמא

א

בני גורן
עמ' 143,
ת. 15



נתון:

$\triangle ABC$

AD תיכון

MC=AM

ND=AN

KD=BK

צל.

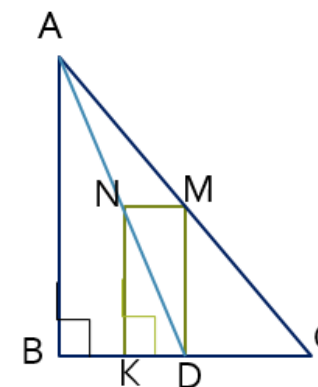
א. NMDK מקבילית

ב. נתון: NMDK מלבן

$\triangle ABC = ?$

ג. נתון: NMDK מעוין

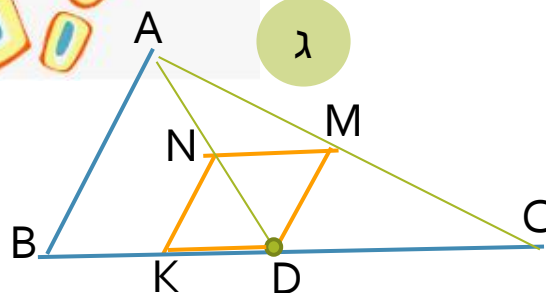
$\triangle ABC = ?$



טענה	נימוק
1 MN קטע אמצעים ב $\triangle ADC$	נתון: N,M אמצעי צלעות
2 $MN \parallel DC, MN = \frac{1}{2}DC$	ע"פ משפט על ק"א במשולש
3 $KD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}DC$	נתון: אמצע BD, D אמצע BC
4 $MN \parallel KD$	2,3
5 NMDK מקבילית	מרובע בעל זוג צלעות שוות ומקבילות
	מ.ש.ל א'

ב

טענה	נימוק
1 NK קטע אמצעים ב $\triangle ABD$	נתון: N,K אמצעי צלעות
2 $NK \parallel AB$	ע"פ משפט על ק"א במשולש
3 $\angle NKD = 90^\circ$	נתון: NMDK מלבן
4 $\angle ABC = 90^\circ$	זוויות מתאימות AB ו NK, ק"ח BC
5 $\triangle ABC$ ישר זווית	4
	מ.ש.ל ב'



ג

טענה	נימוק
1 NK קטע אמצעים ב $\triangle ABD$	נתון: N,K אמצעי צלעות
2 $NK = \frac{1}{2}AB$	ע"פ משפט על ק"א במשולש
3 NM קטע אמצעים ב $\triangle ADC$	נתון: M,N אמצעי צלעות
4 $NM = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{4}BC$	ע"פ משפט על ק"א במשולש, נתון D אמצע הצלע
5 $NK = NM$	נתון NMDK מעוין
6 $\frac{1}{4}BC = \frac{1}{2}AB$	4,2,5
7 $BC = 2AB$	
	מ.ש.ל ג'



תרגילים לדוגמא

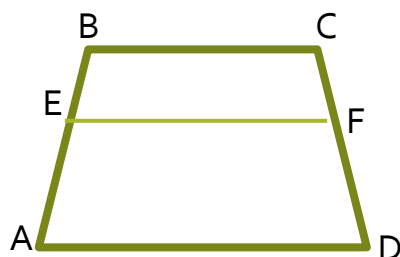
הוכיחו או הפריכו

דרך הישר, עמ'
61, ת. 85

ג. שני מרובעים שצלעותיהם
המתאימות שוות הם חופפים
הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית:

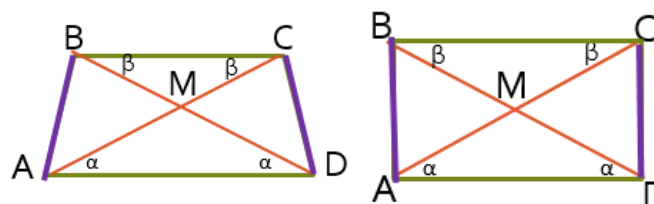


ה. שני טרפזים, שזוויותיהם
שוות בהתאמה והבסיס הגדול
בהם שווה הם טרפזים חופפים
הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית:



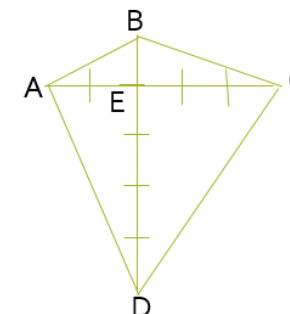
נעביר $EF \parallel AD$
לטרפזים ABGD ו AEFD
הזוויות שוות בהתאמה,
הבסיס AD משותף. אבל
הטרפזים לא חופפים.

ב. מרובע שאלכסוניו שווים
ושתי צלעות נגדיות שוות הוא
טרפז שווה שוקיים או מלבן
הטענה נכונה. הוכחה:



נימוק	טענה	
<u>צ.צ.צ.</u>	$\triangle ACD \cong \triangle DBA$	1
<u>ז.מ.ב.ח.</u> ($CD=AB$)	$\angle CAD = \angle BDA = \alpha$	2
<u>צ.צ.צ.</u>	$\triangle BDC \cong \triangle CAB$	3
<u>ז.מ.ב.ח.</u> ($CD=AB$)	$\angle DBC = \angle ACB = \beta$	4
ז. קודקודיות	$\angle BMC = \angle DMA$	5
2,4,5, סכום זוויות במשולש	$\alpha = \beta$	6
אם זוויות מתחלפות שוות אז ישרים מקבילים, 6	$BC \parallel AD$	7

א. מרובע שאלכסוניו שווים
הוא מלבן או טרפז שווה
שוקיים
הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית:



המרובע לא טרפז שווה שוקיים כי
 $EC \neq BE \neq ED \neq AE$
המרובע לא מלבן כי $BC \neq AD, AB \neq CD$



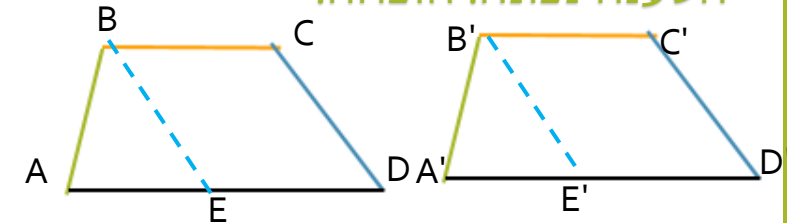
תרגילים לדוגמא

הוכיחו או הפריכו

דרך הישר, עמ'
61, ת. 85 ד'

1. נעביר קטעים $BE \parallel CD$ ו $B'E' \parallel C'D'$
2. $BC \parallel ED$ (טרפז ABCD)
3. BCDE מקבילית (ע"פ 1,2)
4. $E'D'C'B'$ מקבילית (כמו 1-3)
5. $BC=DE, BE=CD, B'C'=E'D', B'E'=C'D'$ (צלעות נגדיות במקבילית)
6. נחפוף $\triangle B'E'A'$ ו $\triangle BAE$ (נתון) $A'B'=AB$
7. $AE=AD-ED=A'D'-E'D'=A'E'$ (ע"פ נתון, 5) $BE=B'E'$ (ע"פ 5) $\triangle ABE \cong \triangle A'B'E'$ (ז.ז.ז.)
8. $\angle A = \angle A', \angle BEA = \angle B'E'A'$ (ז.ז.ז.)
9. $\angle BEA = \angle D$ (ז.ז.ז.) $\angle B'E'A' = \angle D'$ (ז.ז.ז.)
10. $\angle D = \angle D'$
11. מצאנו שזוויות ליד בסיס אחד שוות לכן גם הזוויות ליד הבסס השני שוות (משלימות ל 180°). לכן הטרפזים חופפים.

ד. שני טרפזים שכל צלעותיהם שווים בהתאמה (בסיסים ושוקיים על פי סדר כתיבת האותיות) חופפים זה לזה. הטענה נכונה. הוכחה:



מצולעים חופפים הם שני מצולעים שכל הצלעות שלהם וכל הזוויות שלהם שוות בהתאמה.

על פי הנתון כל הצלעות שוות. לכן נשאר להוכיח שכל הזוויות שוות.



תרגילים לדוגמא

דרך ב'

1. נמשיך את AM כאורכו כך ש $MN=AM$, נעביר NC

2. נחפוף $\triangle BMA$ ו $\triangle CMN$ (נתון)

$BM=MC$

$AM=MN$ (ע"פ ב"ע)

$\angle BMA = \angle CMN$ (קודקודיות)

$\triangle BMA \cong \triangle CMN$ (ז.צ.ז.)

3. $CN=AB$ (ז.מ.ב.ח. מ)

4. $\angle ABM = \angle NCM = \alpha$ (ז.מ.ב.ח. מ $AM=MN$)

5. $\angle BAM = \angle N = \beta$ (ז.מ.ב.ח. מ $MC=BM$)

6. $\angle EAG = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \beta - \angle MAC$

7. $\angle CAN = 180^\circ - \beta - \angle MAC$ (סכום זוויות ב $\triangle ANC$)

8. נחפוף $\triangle ACN$ ו $\triangle GAE$

$EA=AB=NC$ (נתון: $\triangle EDBA$ ריבוע, 3)

$AC=AG$ (נתון: $\triangle ACFG$ ריבוע)

$\angle EAG = \angle ACN$ (ע"פ 6,7)

$\triangle ACN \cong \triangle GAE$ (ז.צ.ז.)

9. $AN=EG$ (ז.מ.ב.ח. מ $\angle EAG = \angle ACN$)

10. $AM = \frac{1}{2} AN = \frac{1}{2} EG$ (ע"פ 9,1)

11. $P = AN \cap EG$

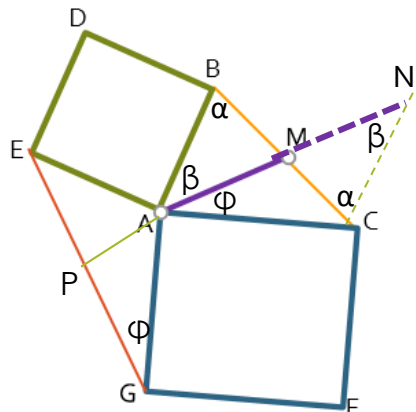
12. $\angle NAC = \angle EGA = \phi$ (ז.מ.ב.ח. מ $EA=NC$, 8)

13. $\angle PAG = 180^\circ - \phi - 90^\circ = 90^\circ - \phi$

14. $\angle APG = 180^\circ - \phi - (90^\circ - \phi) = 90^\circ$ (סכום זוויות ב $\triangle APG$)

15. $AM \perp EG$ (ע"פ 14)

מ.ש.ל.



נתון: $\triangle ABC$,

$\triangle AEDB$, $\triangle ACFG$ ריבועים

AM תיכון ב $\triangle ABC$

צ.ל.: $AM \perp EG$

$AM = \frac{1}{2} EG$

דרך הישר

על צלעות AB ו AC של משולש ABC בנו כלפי חוץ ריבועים ABDE ו ACFG. הוכיחו שקטע EG מאונך להמשך התיכון BC במשולש ABC וגדול פי שתיים מהתיכון

דרך א'

נעשה סבוב המישור

סביב נקודה A ב 90°

עם כיוון השעון.

$E \rightarrow B$

$G \rightarrow G'$

$EG \rightarrow BG'$ לכן

$EG \perp BG'$, $BG' = EG$

$AM \parallel G'B$, $AM = \frac{1}{2} G'B$

$AM \perp EG$

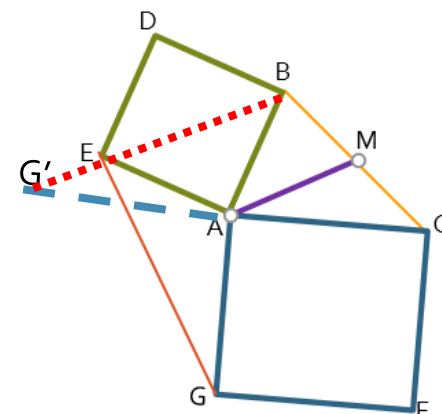
$AM = \frac{1}{2} EG$

$AM \perp EG$

$AM = \frac{1}{2} EG$

$AM \perp EG$

$AM = \frac{1}{2} EG$



נתון: $\triangle ABC$,

$\triangle AEDB$, $\triangle ACFG$ ריבועים

AM תיכון ב $\triangle ABC$

צ.ל.: $AM \perp EG$

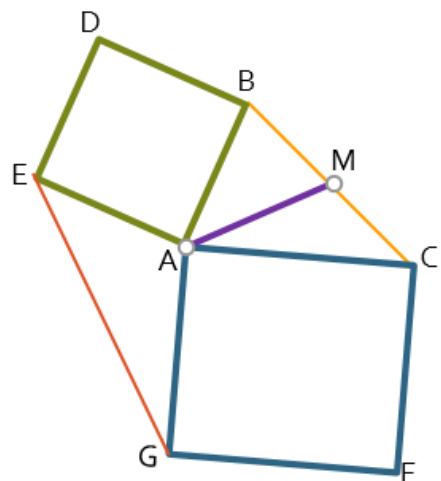
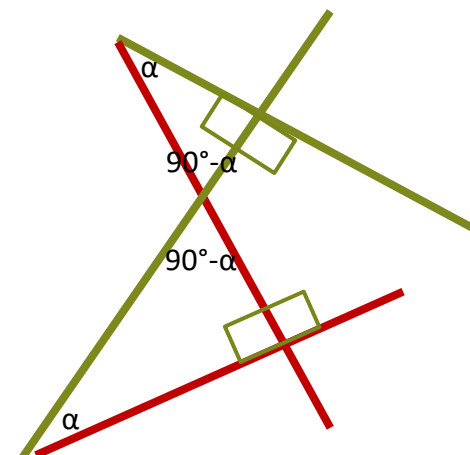
$AM = \frac{1}{2} EG$

$AM \perp EG$

$AM = \frac{1}{2} EG$

$AM \perp EG$

למא (משפט עזר)
אם כל אחת קרניים של
זווית אחת מאונכת לקרן
של זווית אחרת אז הזוויות
שוות זו לזו.



על פי סעיף א' : $AT = \frac{1}{2} EG$

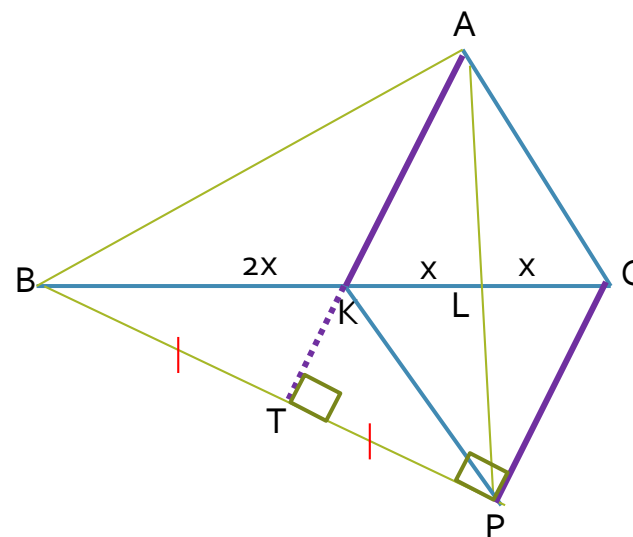
[illegible]

$AB=EA$ בצלעות של אותו ריבוע
 $\angle MEA = \angle TAB$ על פי למא כי
 $AT \perp EG$ על פי סעיף א',
 $AB \perp EA$ צלעות סמוכות של ריבוע
 לכן $\triangle BAT \cong \triangle AEM$ (צ.ז.צ.)



תרגילים לדוגמא

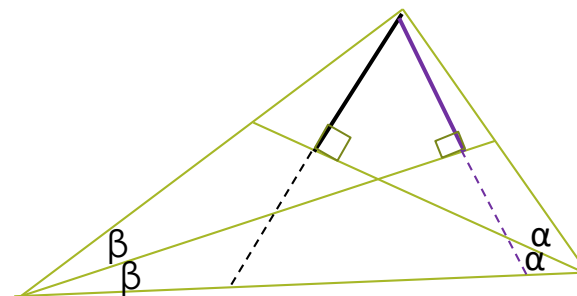
דרך הישר



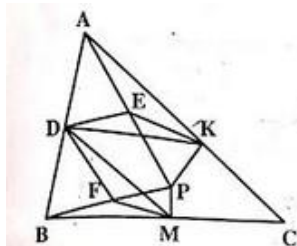


תרגילים לדוגמא

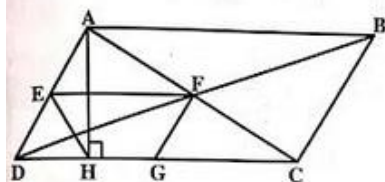
דרך הישר



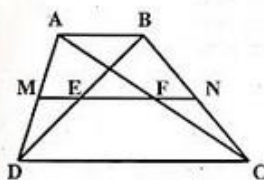
מרכז הלימודים



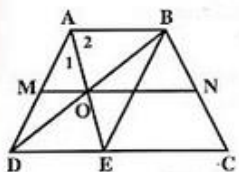
24. מנקודה P שנמצאת בתוך המשולש ABC מורידים אנכים לצלעות AC ו-BC: $PK \perp AC$, $PM \perp BC$. הנקודות D, E ו-F הן אמצעי הקטעים AB, BP ו-AP בהתאמה. נתון: $\angle PAC = \angle PBC$. הוכח: א. $\angle DEK = \angle DFM$. ב. $DK = DM$.



25. המרובעים ABCD ו-DEFG שבוניו הם מקבילים. נתון: $AH \perp DC$. הוכח: FEHG הוא טרפז שווה שוקיים.

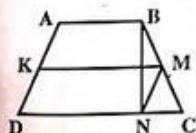


26. MN הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD ($AB \parallel CD$). הוכח: א. $ME = NF$. ב. $EF = FN$. נתון: i. $DC = 2 \cdot AB$. ii. $ABNE$ - מקבילית.

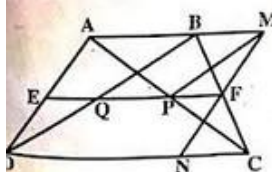


27. MN הוא קטע האמצעים בטרפז ABCD ($AB \parallel CD$). הקטעים AE ו-DB נפגשים בנקודה O שעל קטע האמצעים. הוכח: א. $ABED$ - מקבילית. ב. נתון: $AD = BC$, $AE \parallel BC$, $\angle A_1 = \angle A_2$, $MN = 15$ ס"מ. חשב את היקף הטרפז ABCD. תשובה: ב. 50 ס"מ.

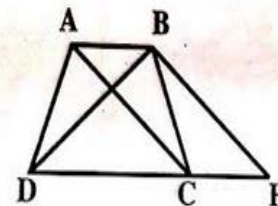
28. הנקודות K, L, M, N הן אמצעי הצלעות בטרפז שווה שוקיים ABCD. הוכח: KLMN - מעוין.



29. MK הוא קטע האמצעים בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$). הוכח: $\angle ABN = 90^\circ$.

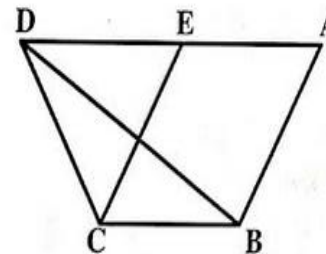


30. EF הוא קטע האמצעים בטרפז ABCD ($AB \parallel CD$). המרובע AMND הוא מקבילית. הצלע MN עוברת דרך הנקודה F, הותך את אלכסוני הטרפז בנקודות Q ו-P. הוכח: המרובע PQBM הוא מקבילית. נתון: $CM \perp AM$. הוכח: הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים.



22. בטרפז שווה שוקיים ABCD ($AD = BC$, $AB \parallel CD$). נתון: $CE = AB$ (CE - המשך של DC). הוכח: המשולש DBE הוא שווה שוקיים. ב. נתון: $AC \perp BD$, $AB = 7$ ס"מ, $DC = 11$ ס"מ. חשב את אורך גובה הטרפז.

תשובה: ב. 9 ס"מ.

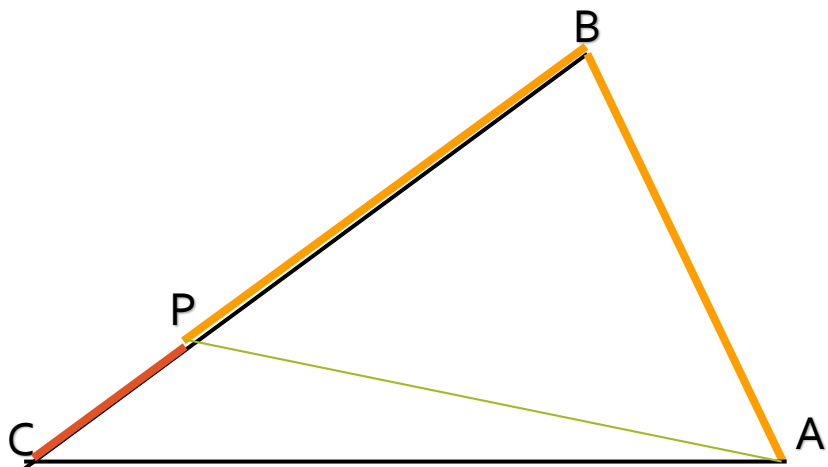


23. בטרפז שווה שוקיים ABCD ($BC \parallel AD$). האלכסון BD חוצה את הזווית $\angle ADC$. כמו כן, הקטע, המחבר את הקודקוד C עם אמצע AD חוצה את הזווית $\angle DCB$. נתון: היקף הטרפז הוא 80 ס"מ. חשב את גודל זוויות ואת אורכי צלעות הטרפז.

תשובה: $120^\circ, 60^\circ$; 16 ס"מ, 16 ס"מ, 16 ס"מ, 32 ס"מ.

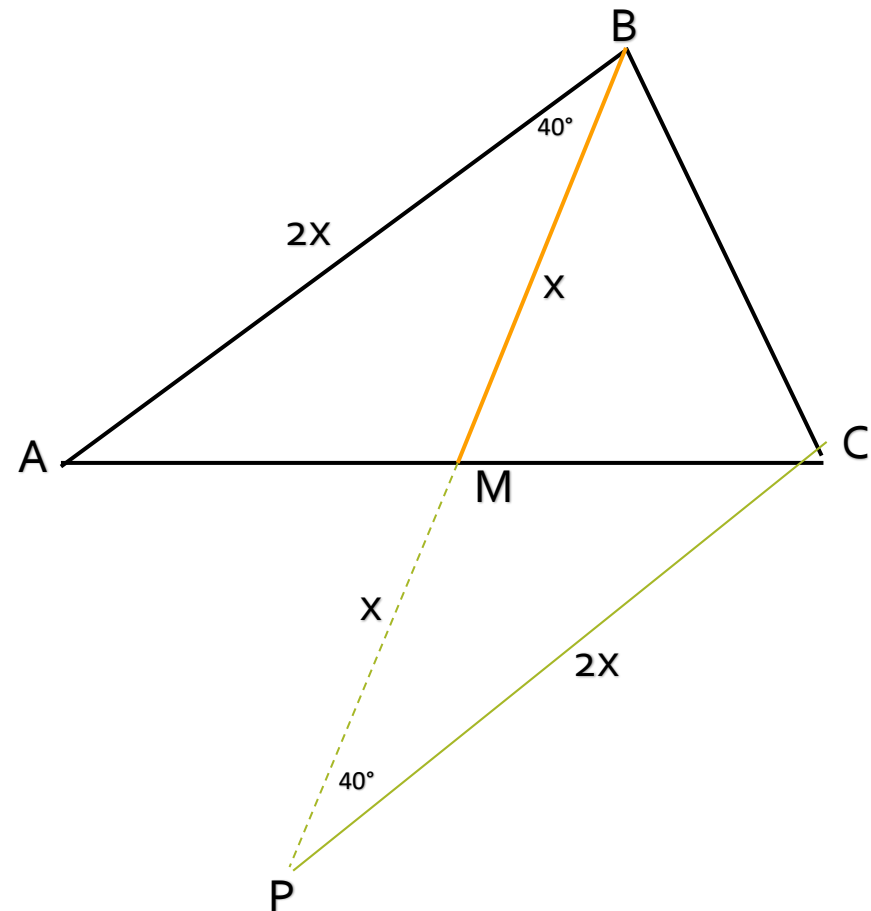
תרגול בניית שרטוט ובניות עזר

1. במשולש ABC תיכון BM קטן פי 2 מצלע AB ויוצר איתה זווית בת 40 מעלות. חשבו את הזווית ABC.
2. במשולש ABC ידוע ש $AB < BC$, הוכיחו ש $BC - AB < AC$.
3. במשולש ABC זווית B שווה ל 20 מעלות, זווית C שווה ל 40 מעלות. חוצה זווית AD שווה ל 2. מצאו את ההפרש BC-AB.
4. במשולש ישר זווית ABC זווית B ישרה, AD חוצה זווית A. הוכיחו ש $BD < DC$.
5. על ניצבים AC ו BC של משולש ישר זווית ABC בונים כלפי חוצה ריבועים ACDE ו BCKF. מנקודות E ו F מורידים אנכים EM ו FN להמשכי היתר של המשולש AB. הוכיחו ש $EM + FN = AB$.
6. במשולש ABC זווית בין שני הגבהים שווה ל 60 מעלות. נקודת החיתוך של הגבהים מחלקת אחד מהם ביחס 2:1 מהקודקוד. הוכיחו שמשולש ABC שווה שוקיים.
7. במשולש ABC חוצה זווית AE שווה ל EB. על המשך AE אחרי נקודה E לוקחים נקודה D כך ש $CE = ED$. הוכיחו: א. CD מקביל ל AB. ב. מצאו את גודל הזווית ABC אם ידוע ש $AB = 2AC$.
8. על צלעות AB ו BC של משולש ABC בונים כלפי חוצה ריבועים ABDE ו BCKF. הוכיחו שקטע DF גדול פי 2 מתיכון BP של המשולש ABC.
9. קטע אמצעים של טרפז שווה ל 4 וזוויות ליד הבסיס הגדול שוות ל 40 ו 50 מעלות. אורך הקטע שמחבר אמצעי הבסיסים של הטרפז שווה ל1. מצאו את אורכי הבסיסים של הטרפז.
10. במרובע קמור ABCD כל ארבע חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת. הוכיחו:
 $AB + DC = AD + BC$.



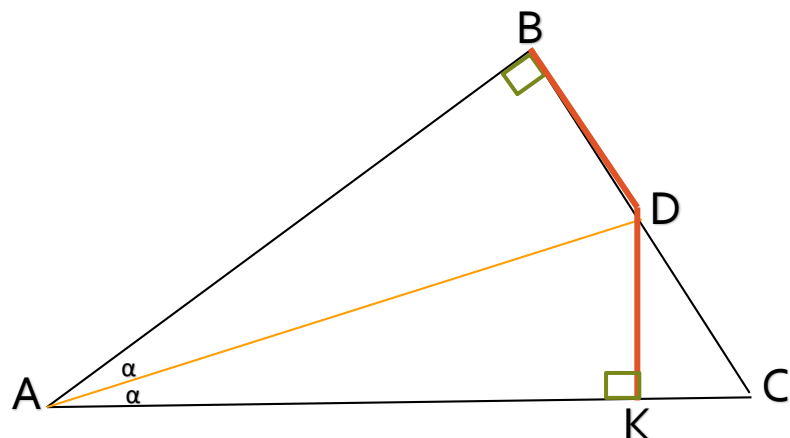
2

בניית עזר: נסמן $P \in BC$ כך ש $BA=PB$, נעביר PA
מטרה: לבנות קטע $PC=BC-BA$ ולהשוות בינו ובין
 AC במשולש APC
 משולש PBA שווה שוקיים
 לכן זווית BPA ו BAP שוות זו לזו וכל אחת חדה
 לכן זווית CPA קהה (צמודה לזווית חדה)
 לכן זווית CPA גדולה במשולש CPA וצלע שמולה AC
 הצלע הגדולה במשולש
 לכן $AC > CP$ לכן $AC > BC - AB$



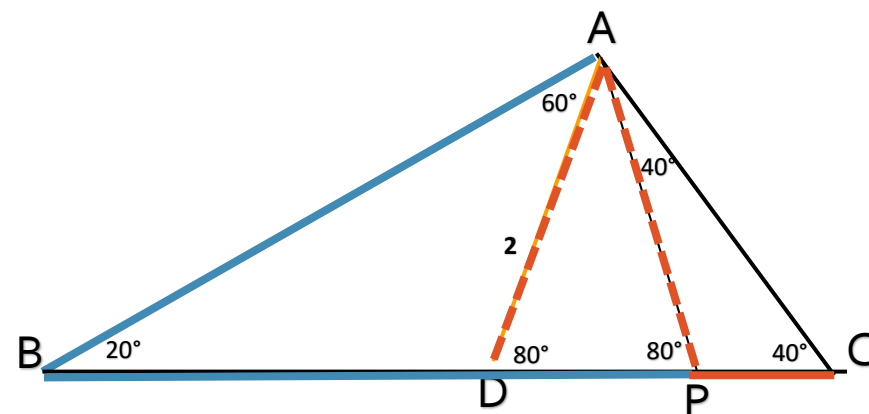
1

בניית עזר: $BM=MP$
 חפיפת משולשים ABM ו CPM על פי צ.ז.צ.
 $AB=CP=BP=2x$
 משולש BPC שווה שוקיים
 זווית PBC ו PCB שוות זו לזו וכל אחת $70 = (180-40):2$
 לכן זווית ABC שווה ל $40+70=110$



4

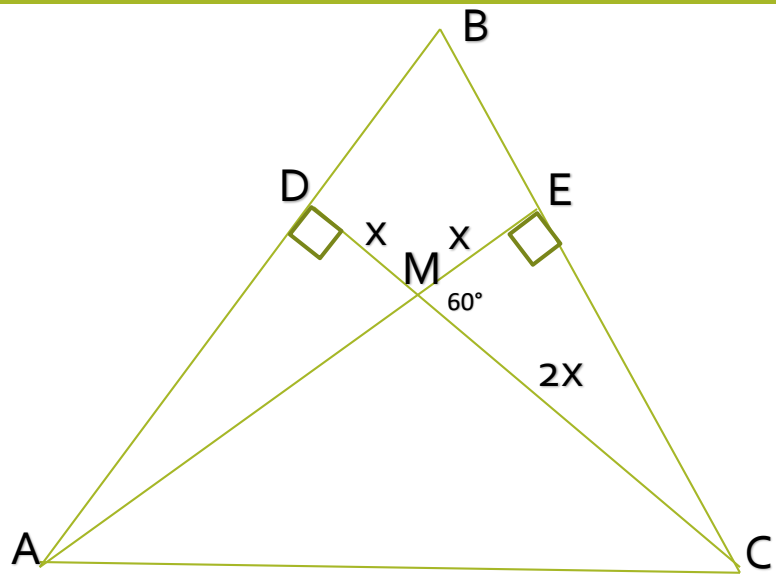
מילות מפתח: חוצה זווית (מקום גיאומטרי...)
רמז: DB מאונך לAB לכן DB הוא מרחק מנקודה B שנמצאת על חוצה זווית מאחת הצלעות של הזווית
בנית עזר: $DK \perp AC$ (מרחק של אותה נקודה מצלע השנייה של הזווית) לכן $DK = BD$
 במשולש DCK: $DK < DC$ (מול זווית ישרה)
 לכן $BD < DC$



3

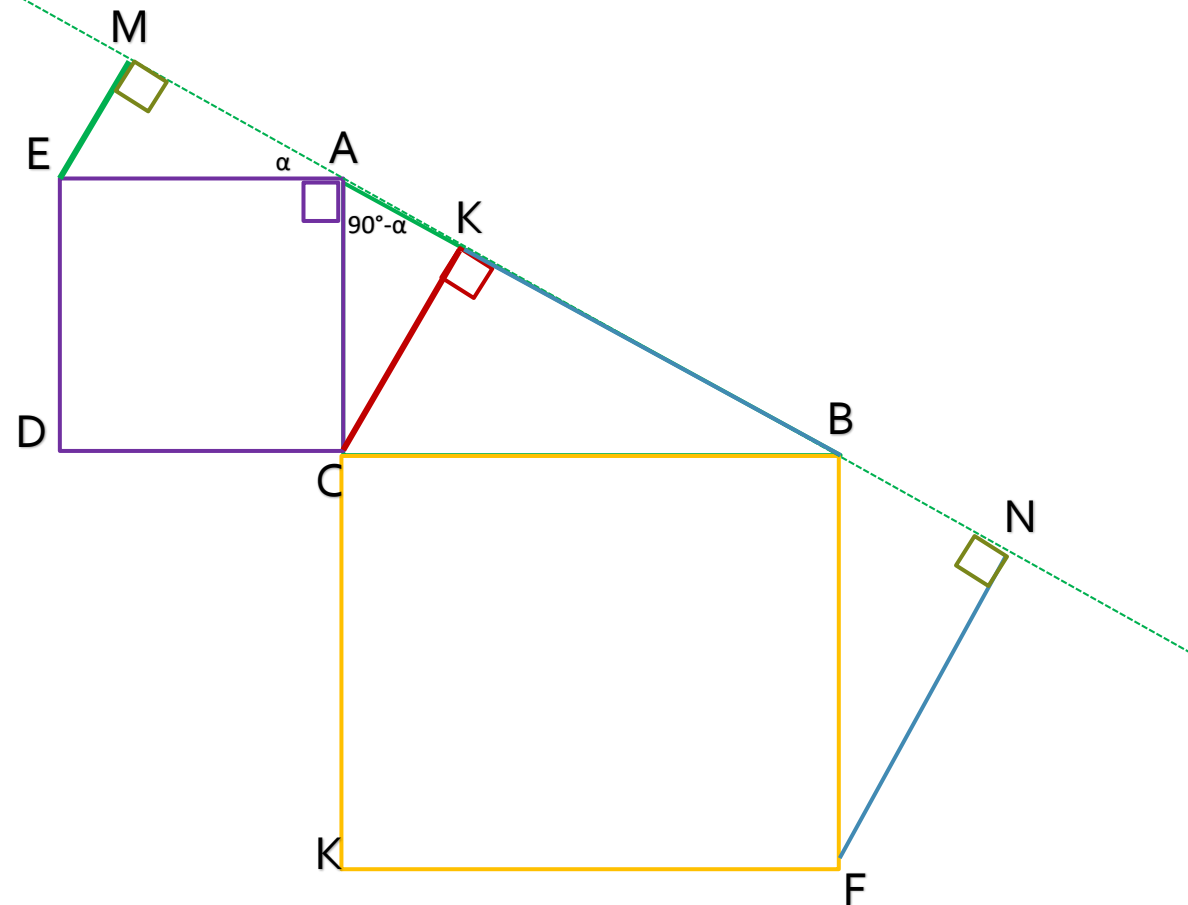
בניית עזר: נסמן $P \in BC$ כך ש $BA = PB$, נעביר PA
מטרה: לבנות קטע $PC = BC - BA$
 משולש PBA שווה שוקיים
 לכן זווית BPA ו BAP שוות זו לזו וכל אחת שווה ל 80 מעלות.
 זווית CAPB חיצונית למשולש APC לכן זווית PAC שווה ל $80 - 40 = 40$ מעלות. לכן $PC = AP$.
 זווית BAD שווה ל 60 מעלות (על פי סכום זוויות במשולש ABC ו AD חוצה זווית).
 לכן זווית ADP שווה ל $60 + 20 = 80$ (חיצונית למשולש ABD)
 לכן $AP = AD = 2$ (צלעות שוות מול זוויות שוות במשולש ADP)
 לכן $BC - AB = PC = AP = AD = 2$

5

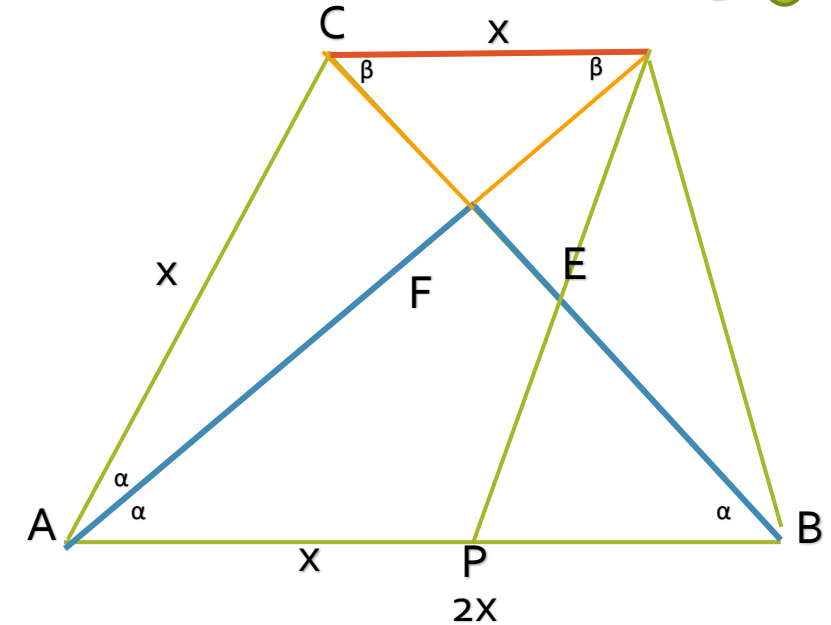


משולש EMC 30,60,90 לכן $ME=x$
 משולשים ADM ו CEM חופפים על פי ז.צ.ז.
 לכן זווית DAM שווה לזווית ECM.
 $CM=AM$ (מהחפיפה) לכן $CD=AE$.
 לכן משולשים BAE ו BCD חופפים (ז.צ.ז)
 לכן $BC=AB$

6



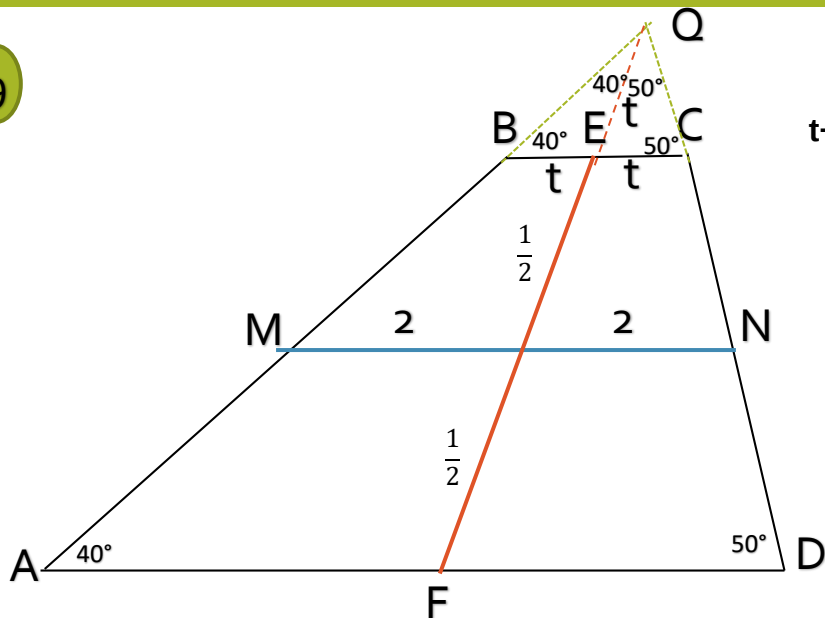
בניית עזר: $CK \perp AB$
 חפיפת משולשים EMA ו AKC (ז.צ.ז.) לכן $EM=AK$
 חפיפת משולשים FNB ו BKC (ז.צ.ז.) לכן $FN=BK$



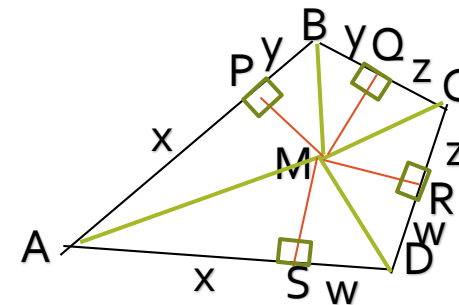
בניית עזר: נסמן $P \in AB$ כך ש $PA=PB=x$, נעביר PD
 CDPA מקבילית (CD=DP).
 $DP=AC=x$ צלעות נגדיות במקבילית.
 נעביר DB. ACDB טרפז (CD=AB) שווה שוקיים (אלכסונים שווים
 זה לזה $CB=AD$). לכן זווית DBA שווה לזווית CAB שווה 2α
 $DP=AP=BP=x$ לכן זווית ADB ישרה (משפט הפוך לתיכון ליתר)
 $\alpha+90^\circ+2\alpha=180^\circ$ (סכום זוויות במשולש ADB)
 לכן $\angle ABC=\alpha=30^\circ$

$$\begin{aligned} 2\beta &= 180^\circ - \angle CED \\ 2\alpha &= 180^\circ - \angle AEB \\ \angle CED &= \angle AEB \text{ (קודקודיות)} \\ \text{לכן } \alpha &= \beta \text{ לכן } CD \parallel AB \end{aligned}$$

הפתרון של שאלה 8 נמצא בשקף 18 של מצגת זו.



$$t + \frac{1}{2} = 2, t = \frac{3}{2} \quad BC = 2t = 3, AD = 5$$



מילת מפתח: אמצע

רמז: סכום זוויות שווה ל-90 מעלות

בניית עזר: להמשיך את השוקיים, נסמן נקודת מפגש ב Q.

הוכחה ש A, E, Q על ישר אחד

נעביר QF – תיכון ב משולש AQD.

FD = AF = QF (תיכון ליתר במשולש ישר זווית)

$$\angle FAQ = \angle FQA$$

$$\angle QBE = \angle FAQ \quad (\text{מתאימות})$$

$$\angle QBE = \angle BQE \quad \text{לכן}$$

$$\angle QCE = \angle CQE \quad \text{באותו אופן}$$

לכן CE = BE = QE לכן QE תיכון במשולש BQC

מילות מפתח: חוצי זוויות

בניית עזר: אנכים לכל הצלעות מנקודת המפגש של חוצי הזוויות מתקבל:

$$MP = MQ = MR = MS$$

חופפים משולשים AMP עם AMS

MPB עם MQB, CMR עם CMQ, DMR עם DMS

מהחפיפה

$$PB = BQ = y, QC = CR = z,$$

$$DR = SD = t, AP = AS = x,$$

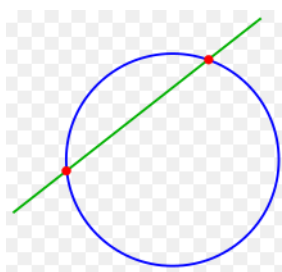
$$AB + CD = x + y + z + w$$

$$BC + AD = y + z + x + w$$

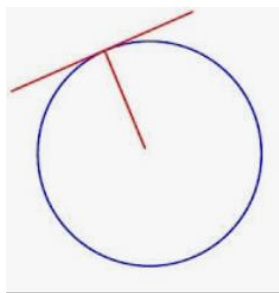
$$\text{לכן } AB + CD = BC + AD$$

גיאומטריה
מכינה 2022
יחידות שישית-
שבועית (שיעורים
(16-18,19-21)



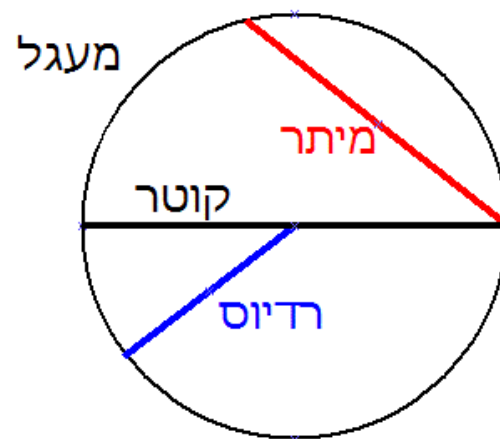


הגדרה: חותך הוא ישר שיש לו ולמעגל שתי נקודות משותפות בלבד



הגדרה: משיק הוא ישר שיש לו עם המעגל נקודה אחת משותפת בלבד. לנקודה זו קוראים **נקודת ההשקה**.

המעגל



הגדרה: מיתר הוא קטע שמחבר בין שתי נקודות על המעגל.

הגדרה: קוטר הוא מיתר שעובר דרך מרכז המעגל.

הגדרה: מעגל הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות במישור שנמצאות במרחקים שווים מנקודה שנקראת מרכז המעגל

הגדרה: רדיוס הוא קטע שמחבר המרכז המעגל עם נקודה שעליו

❖ למעגל יש אינסוף רדיוסים שכולם שווים זה לזה

❖ מקובל להשתמש במילה "רדיוס" גם עבור אורך הרדיוס.

❖ על פי אקסיומה של אוקלידס כל מעגל מוגדר חד משמעית על ידי המרכז והרדיוס שלו.

המעגל

הגדרה: זווית מרכזית

הוא זווית שקודקודה במרכז המעגל והצלעות הן רדיוסים של המעגל

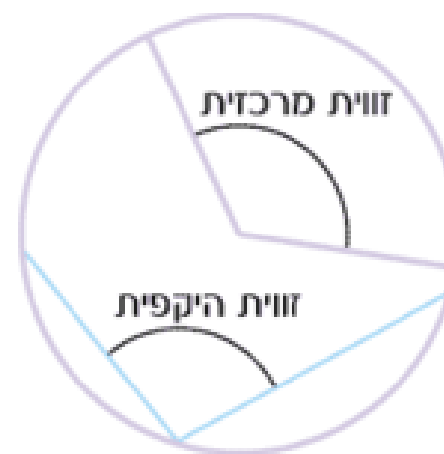
הגדרה: קשת הוא היא

חלק של המעגל הנמצא בין שתי נקודות שעליו

הגדרה: זווית היקפית

הוא זווית שקודקודה על המעגל והצלעות הן מיתרים של אותו מעגל

❖ לכל זווית מרכזית ולכל זווית היקפית מתאימה קשת. אומרים "הזווית נשענת על קשת"



הגדרה: זווית חיצונית

היזווית שקודקודה מחוץ למעגל והצלעות הן חלקי החותכים של המעגל

הגדרה: זווית פנימית

הוא זווית שקודקודה בתוך המעגל והצלעות הן חלקי המיתרים

הגדרה: זווית בין משיק

למיתר הוא זווית

שקודקודה בנקודת

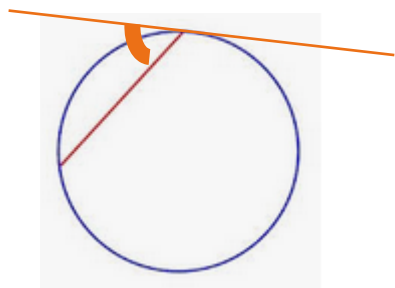
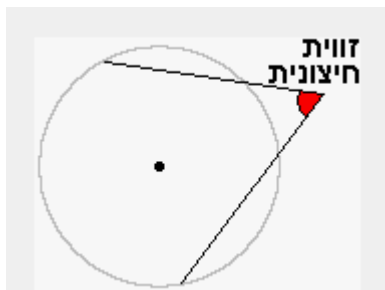
ההשקה מש המשיק, קרן

אחת היא לק של משיק

וקרן השנייה היא מיתר

שאחד הקצוות שלו

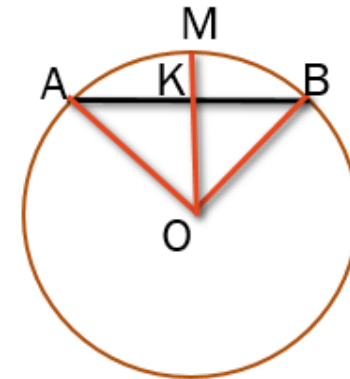
נקודת ההשקה



המעגל

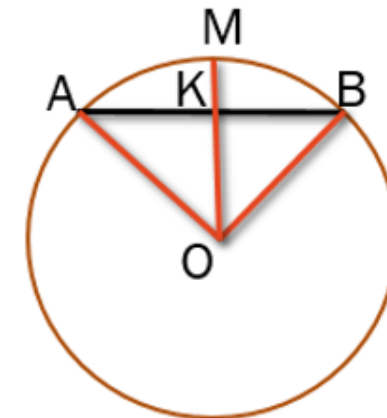
משפט: רדיוס מאונך למיתר
אם ורק אם הוא חוצה אותו

כיוון ראשון



נתון: מעגל O
OM רדיוס
AB מיתר
 $K = AB \cap OM$
 $OM \perp AB$
צ.ל. $AK = KB$

כיוון שני



נתון: מעגל O
OM רדיוס
AB מיתר
 $K = AB \cap OM$
 $AK = KB$
צ.ל. $OM \perp AB$

הוכחה:

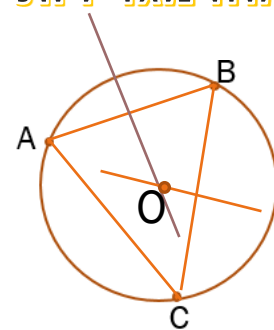
1. נעביר רדיוסים OA, OB
2. $OB = OA$ כי רדיוסים של אותו מעגל
3. $\triangle AOB$ שווה שוקיים, על פי 2
4. במשולש שווה שוקיים תיכון וגובה לבסיס מתלכדים לכן
5. $AK = KB \iff AK \perp KB$ מ.ש.ל. שני הכיוונים

משפט: שלוש נקודות שלא

נמצאות על ישר אחד מגדירות

מעגל אחד ויחיד.

הוכחה:

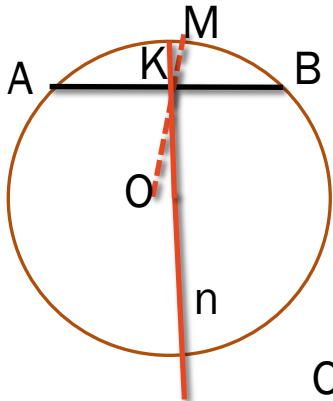


1. מעגל מוגדר על ידי מרכז ורדיוס שלו.
2. שלוש נקודות מגדירות משולש
3. שלושה אנכים אמצעים לצלעות המשולש נפגשים בנקודה אחת שנמצאת במרחקים שווים מקודקודי המשולש.
4. נקודה זו היא מרכז המעגל והמרחק שלה מהקודקודים הוא רדיוס.

משפט (הפוך): אנך אמצעי

למיתר המעגל עובר דרך מרכז

המעגל.



נתון: מעגל O
OM רדיוס
ישר n, $K = AB \cap n$
 $n \perp AB$, $AK = KB$
צ.ל. $O \in n$

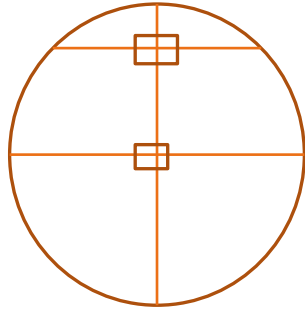
הוכחה:

1. נניח בשלילה ש $O \notin n$
 2. אם כך נעביר דרך נקודות O ו K רדיוס המעגל OM
 3. OM רדיוס שחוצה את המיתר AB (עובר דרך K אמצע AB)
 4. לכן על פי המשפט $OM \perp AB$ סתירה! כי בלתי אפשרי לעלות באותה נקודה שני אנכים שונים לאותו קטע.
- לכן ההנחה לא נכונה ו $O \in n$ מ.ש.ל.

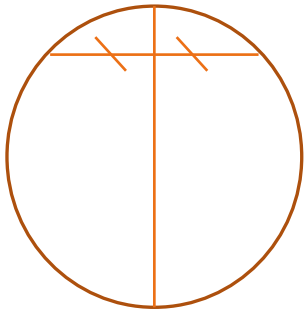


מה יקרה אם נחליף רדיוס לקוטר?

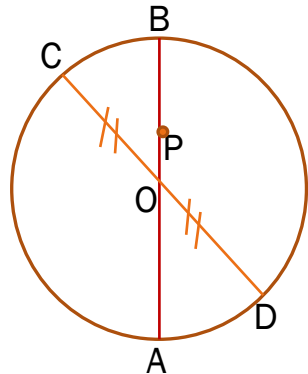
אם קוטר מאונך למיתר
אז הוא חוצה אותו (גם
אם המיתר הוא גם
קוטר



אם קוטר חוצה את למיתר אז או שהוא
מאונך לו או שהמיתר השני הוא גם קוטר



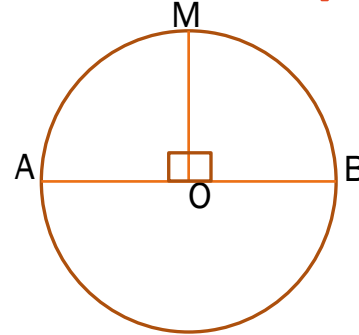
אם O לא מרכז המעגל אז קיים $P \in AB$ מרכז
המעגל שעבורו מתקיים $PA \perp CD$. לכן אם הם
לא מאונכים אז CD קוטר



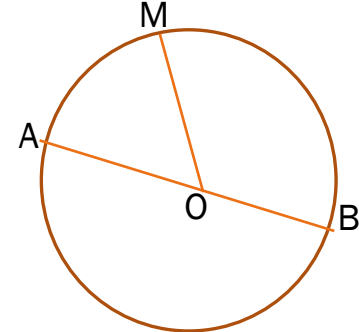
שאלות לדיון

המשפט הוכח במקרה שהמיתר
הוא לא קוטר.

מה יקרה אם המיתר הוא קוטר?



הכיוון הראשון מתקיים:
 $MO \perp AB, AO = OB$

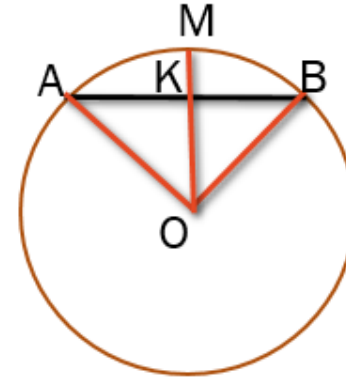


הכיוון השני **לא** מתקיים:
רדיוס לא בהכרח מאונך לקוטר,
למרות ש $AO = OB$

משפט: רדיוס מאונך למיתר
אם ורק אם הוא חוצה אותו

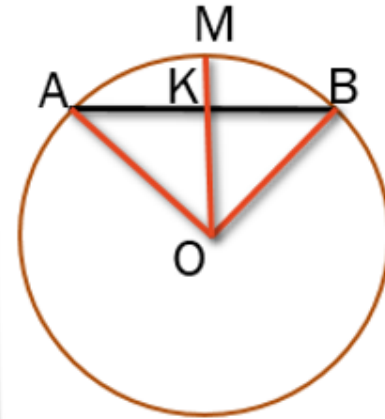
כיוון ראשון

נתון: מעגל O
 OM רדיוס
 AB מיתר
 $K = AB \cap OM$
 $OM \perp AB$
צ.ל. $AK = KB$



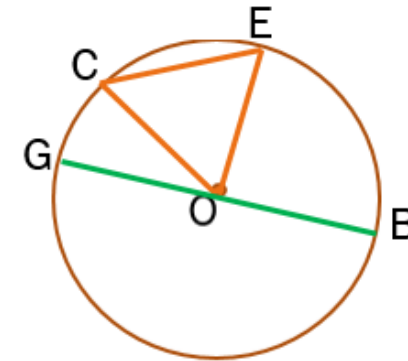
כיוון שני

נתון: מעגל O
 OM רדיוס
 AB מיתר
 $K = AB \cap OM$
 $AK = KB$
צ.ל. $OM \perp AB$



המעגל

משפט: קוטר הוא מיתר הכי ארוך במעגל

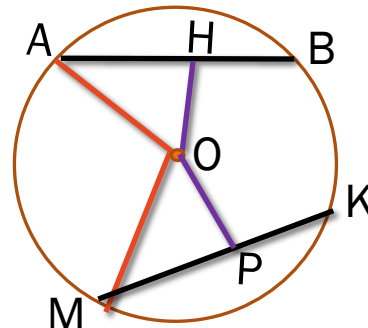


נתון: מעגל O
GB קוטר
CE מיתר
צ.ל. $GB > CE$

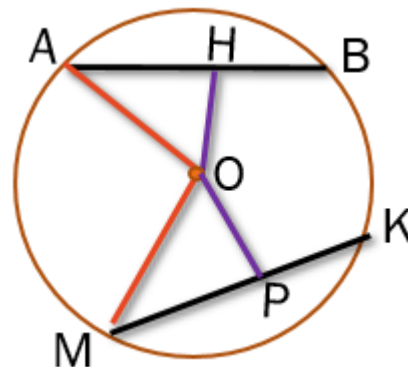
הוכחה:

1. נעביר רדיוסים OC ו OE (ב.ע.)
2. $OC + OE > CE$ (אי שוויון המשולש ב $\triangle OCE$)
3. $GB = OC + OE$ (הגדרת הקוטר)
4. $GB > CE$ (ע"פ 2,3) מ.ש.ל.

משפט: שני מיתרים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל אם ורק אם הם שווים זה לזה.



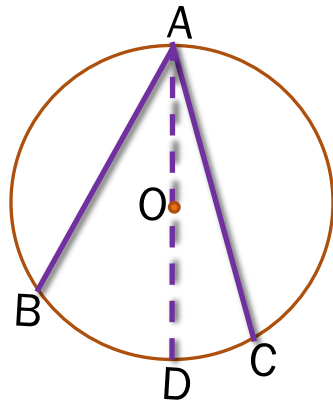
כיוון ראשון
נתון: מעגל O
AB, MK מיתרים
 $OH \perp AB$
 $OP \perp MK$
 $MK = AB$
צ.ל. $OP = OH$



כיוון שני
נתון: מעגל O
AB, MK מיתרים
 $OH \perp AB$
 $OP \perp MK$
 $OP = OH$
צ.ל. $AB = MK$

הוכחה (כיוון ראשון):

1. נעביר רדיוסים OA, OM
 2. $OM = OA$ כי רדיוסים של אותו מעגל
 3. $OH \perp AB$
 4. $HB = AH$ על פי המשפט: רדיוס שמאונך למעגל חוצה אותו
 5. $PK = MP$ כמו 3,4
 6. $MK = AB$, נתון
 7. $MP = AH$, על פי 4-6
 8. נחפוף $\triangle MOP$ ו $\triangle AOH$
 $OM = AO$ על פי 2
 $MP = AH$ על פי 7
 $\angle H = \angle P = 90^\circ$, נתון
 $\triangle MOP \cong \triangle AOH$ על פי צ.צ.ז. מול הצלע הגדולה (90°)
 9. $OP = OH$ צ.מ.ב.ח.
- מ.ש.ל. כיוון הראשון
באותו אופן מוכחים גם את הכיוון השני.



ב

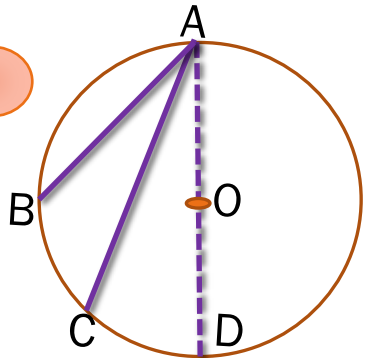
נוכיח מיקרה ב'.

1. נעביר קוטר AD
2. $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup CD$, $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BD$ על פי ההוכחה של מקרה א'

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \frac{1}{2} \cup BD + \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} \cup BC$$

נוכיח מיקרה ב'.

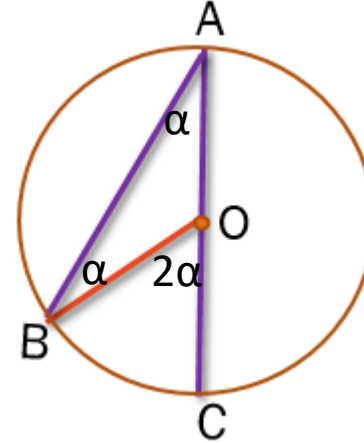
ג



1. נעביר קוטר AD
2. $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup CD$, $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BD$ על פי ההוכחה של מקרה א'
3. $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = \frac{1}{2} \cup BD - \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} \cup BC$

המעגל

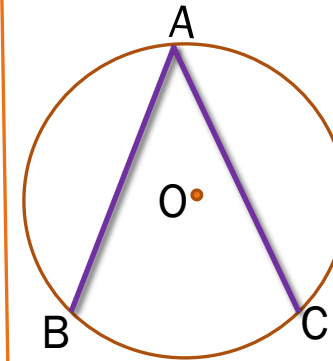
א



נוכיח תחילה את מיקרה א'.

1. נעביר רדיוס OB
2. $OB = OA$ כי רדיוסים של אותו מעגל
3. $OH \perp AB$
4. $\angle A = \angle B = \alpha$, במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות ($\triangle AOB$)
5. $\angle BOC = 2\alpha$, זווית חיצונית ל $\triangle AOB$
6. $\angle BOC = 2\alpha$, קשת שווה $\cup BC$
7. $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$, על פי 4, 6, מ.ש.ל.א'

משפט: זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת.



נתון: מעגל O
 $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$

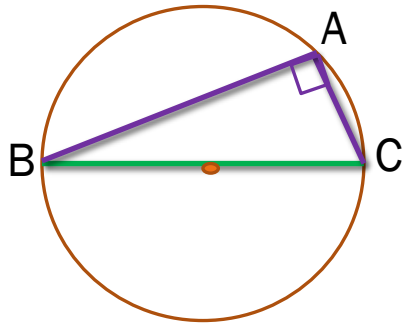
הוכחה :

- נבדיל בין שלושה מיקרים:
- א. אחת הצלעות של הזווית ההיקפית היא קוטר
- ב. הקוטר נמצא בין צלעות הזווית
- ג. שתי צלעות הזווית נמצאות מצד אחד של הקוטר

המעגל

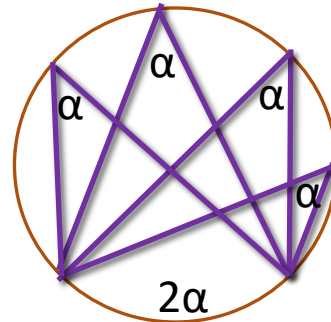
מסקנות מהמשפט על זווית היקפית

משפט: זווית היקפית שנשענת על הקוטר שווה ל 90°

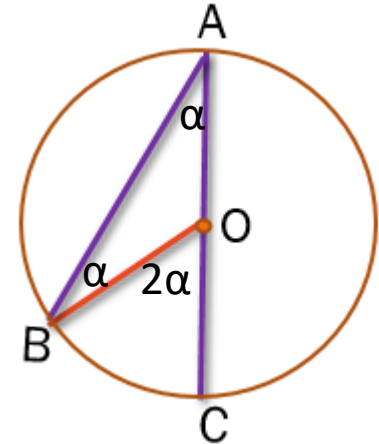


$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

משפט: כל הזוויות ההיקפיות שנשענות על אותה קשת או על קשתות שוות זו לזו



משפט: זווית היקפית שווה למחצית מזווית המרכזית מנשענת איתה על אותה קשת



$$\angle BOC = 2\angle BAC$$



שאלות חשיבה

הוכח או הפרך טענות
הבאות:

1. אם זווית היקפית
שנשענת על המיתר
שווה ל 90° אז המיתר
הוא קוטר

2. אם אחת משתי
זוויות שנשענות על
אותה קשת היקפית
והיא שווה למחצית
מזווית השנייה אז
הזווית השנייה היא
מרכזית.

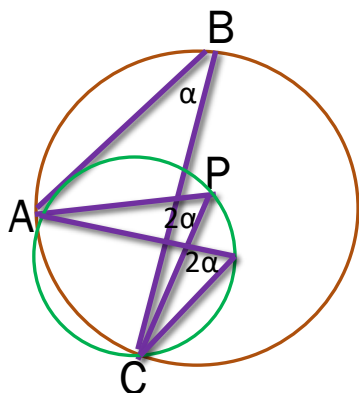
3. על מיתרים שווים נשענות
זוויות היקפיות שוות

4. אם זווית שקודקודה בתוך
המעגל שווה לקשת שעלייה
היא נשענת אז הזווית היא
זווית מרכזית וקודקודה מרכז
המעגל.



המעגל

טענות הפוכות למשפט על זווית היקפית



למרות ש $\angle APC = 2\angle ABC$ נקודה P לא בוודאות מרכז המעגל כי כל הנקודות שנמצאות על המעגל הירוק שוות ל 2α (היקפיות על אותה קשת במעגל הירוק) אבל רק אחת מהן מרכזית.

כאן רואים גם שהטענה הבאה **לא**

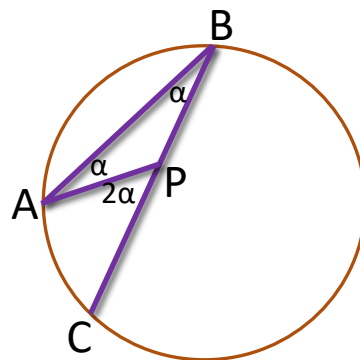
נכונה

אם זווית שקודקודה בתוך המעגל שווה לקשת שעלייה היא נשענת אז הזווית היא זווית מרכזית וקודקודה מרכז המעגל.
הטענה לא נכונה

טענה: אם אחת משתי זוויות

שנשענות על אותה קשת היקפית והיא שווה למחצית מזווית השנייה אז הזווית השנייה היא מרכזית.

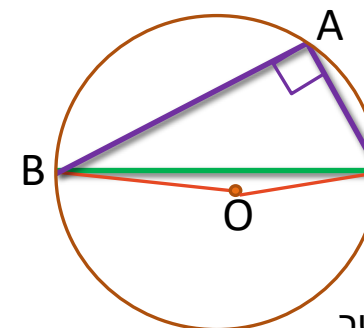
הטענה זו לא נכונה



למרות ש $\angle APC = 2\angle ABC$ נקודה P היא לא מרכז המעגל. הטענה תהיה נכונה אם ידוע ש BC קוטר.

משפט: אם זווית

היקפית שנשענת על המיתר שווה ל 90° אז המיתר הוא קוטר



נתון: מעגל O

$\angle BAC = 90^\circ$ היקפית
צ.ל. BC קוטר

הוכחה:

נניח בשלילה ש BC לא קוטר.

אם כך אז מרכז המעגל O לא נמצא על BC.

נעביר רדיוסים OB ו OC.

$\angle BOC$ מרכזית

על פי המשפט על זווית היקפית

$$\angle BOC = \angle BC = 2\angle BAC = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$$

אם כך $\angle BOC$ שטוחה. על פי ההגדרה

של זווית שטוחה הנקודות B, O, C נמצאות על

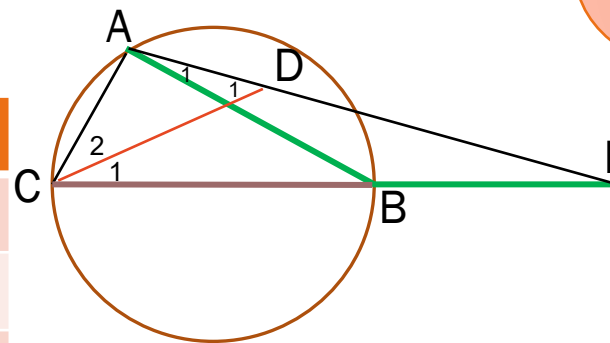
ישר אחד בניגוד להנחה.

לכן ההנחה לא נכונה ו BC קוטר.



המעגל תרגיל לדוגמא

בני גורן
עמ' 183,
ת. 33



נתון: מעגל O
CB קוטר
 $\angle C_1 = \angle C_2$
BE=AB

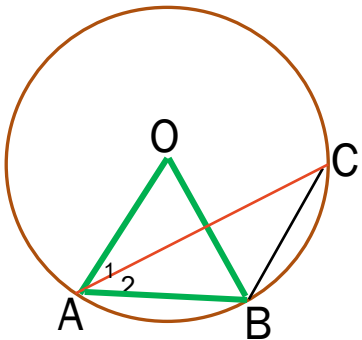
צ.ל.א. $\angle C_1 + \angle A_1 = 45^\circ$
ב. $\angle D_1 = 45^\circ$

נימוק	טענה	
זווית היקפית נשענת על הקוטר	$\angle CAB = 90^\circ$	1
	נסמן $\angle A_1 = \alpha$	2
במשולש ($\triangle ABE$) מול צלעות שוות זוויות שוות, נתון	$\angle E = \angle A_1 = \alpha$	3
זווית חיצונית ל $\triangle ABE$	$\angle ABC = 2\alpha$	4
סכום זוויות במשולש ($\triangle ABC$), 1,	$\angle C_1 + \angle C_2 + \angle ABC = 90^\circ$	5
נתון ($\angle C_1 = \angle C_2$), 4,5,	$2\angle C_1 + 2\alpha = 90^\circ$	6
6,2	$\angle C_1 + \alpha = 45^\circ \rightarrow \angle C_1 + \angle A_1 = 45^\circ$	7
זווית חיצונית ל $\triangle CDE$	$\angle D_1 = \angle C_1 + \angle E$	8
8,3,7	$\angle D_1 = \angle C_1 + \angle E = \angle C_1 + \alpha = 45^\circ$	9
	מ.ש.ל	



המעגל תרגיל לדוגמא

בני גורן
עמ' 176,
ת. 5

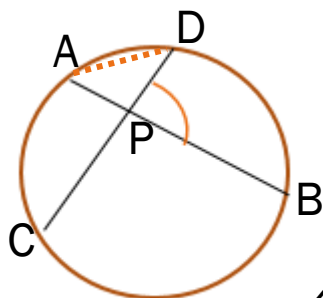


נתון: מעגל O
 $AB=BO=AO$
 $\angle A_1 = \angle A_2$
צ.ל. א. $\angle C, \angle A_2, \angle ABC$
ב. $AO \parallel BC$

נימוק	טענה	
נתון, במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות, סכום זוויות במשולש (אפשר במקום זה $\triangle AOB$ שווה צלעות)	$\angle OAB = \angle OBA = \angle AOB = 60^\circ$	1
זווית היקפית שווה למחצית של זווית מרכזית שנשענת על אותה קשת, 1	$\angle C = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ$	2
נתון AC חוצה זווית, 1	$\angle A_2 = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ$	3
סכום זוויות במשולש $(\triangle ABC)$, 2,3	$\angle ABC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 150^\circ$	4
כמו 3	$\angle A_1 = 30^\circ$	5
5,2	$\angle A_1 = \angle C$	6
אם זוויות מתחלפות שוות אז ישרים מקבילים, 6	$AO \parallel BC$	7
	מ.ש.ל	

המעגל

זוויות פנימיות במעגל



נתון: מעגל O
 CD, AB מיתרים
 $P = AB \cap CD$
 צ.ל.

$$\angle DPB = \frac{1}{2} (\widehat{BD} + \widehat{AC})$$

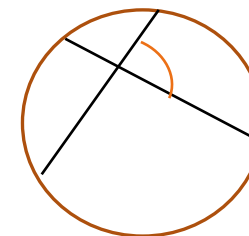


הגדרה: זווית פנימית

הוא זווית שקודקודה בתוך המעגל והצלעות הן חלקי המיתרים

הגדרה (נוספת):

זווית פנימית היא זווית בין שני מיתרים שנחתכים בתוך המעגל

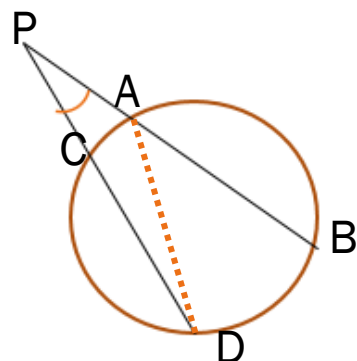


משפט: זווית פנימית שווה למחצית הסכום של הקשתות שבין המיתרים שיוצרים אותה

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיתר AD	1
זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת	$\angle DAB = \frac{1}{2} \widehat{DB}$	2
כמו 2	$\angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$	3
זווית חיצונית למשולש (ΔAPD)	$\angle DPB = \angle DAP + \angle ADP$ $= \angle DAB + \angle ADC$	4
2-4	$\angle DPB = \frac{1}{2} \widehat{DB} + \frac{1}{2} \widehat{AC}$	5
	מ.ש.ל	

המעגל

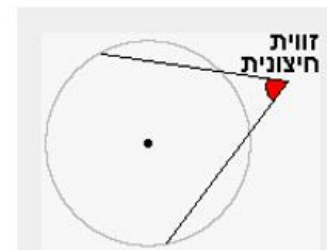
זוויות חיצונית למעגל



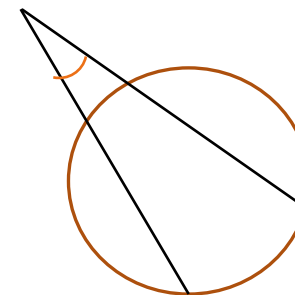
נתון: מעגל O
 מיתרים CD, AB
 $P = AB \cap CD$

צ.ל.

$$\angle DPB = \frac{1}{2} (\widehat{BD} - \widehat{AC})$$



הגדרה: זווית חיצונית
 היזונית שקודקודה מחוץ
 למעגל והצלעות הן חלקי
 החותכים של המעגל

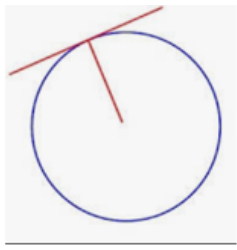


הגדרה (נוספת):

זווית חיצונית היא
 זווית בין המשכי
 שני מיתרים
 שנחתכים מחוץ
 למעגל

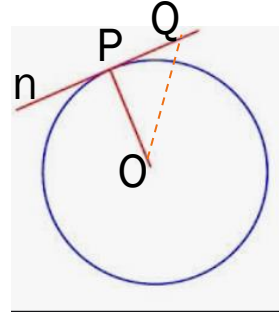
משפט: זווית חיצונית שווה
 למחצית ההפרש בין הקשתות
 שבין המיתרים שיוצרים אותה

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיתר AD	1
זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת	$\angle DAB = \frac{1}{2} \widehat{DB}$	2
כמו 2	$\angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$	3
זווית חיצונית למשולש (ΔAPD)	$\angle DAB = \angle DPA + \angle PDA$ $\angle DPA = \angle DAB - \angle PDA$	4
2-4	$\angle DPB = \frac{1}{2} \widehat{DB} - \frac{1}{2} \widehat{AC}$	5
	מ.ש.ל	



הגדרה: משיק הוא ישר שיש לו עם המעגל נקודה אחת משותפת בלבד. לנקודה זו קוראים **נקודת ההשקה**.

המעגל משיק



נתון: מעגל O
n משיק למעגל
 $P = n \cap O$
צ.ל. $OP \perp n$

הוכחה:

נניח בשלילה שרדיוס לא מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

אם כך נוריד מנקודה O אנך לישר n ($Q \in n$) $OQ \perp n$.
ב $\triangle OPQ$ מתקיים: $OP > OQ$ כי OP נמצאת מול זווית הישרה
(על פי הנחה $\angle Q = 90^\circ$).

הנקודה Q נמצאת מחוץ למעגל על פי הגדרת המשיק (הנקודה P הנקודה המשותפת היחידה למשיק ומעגל)

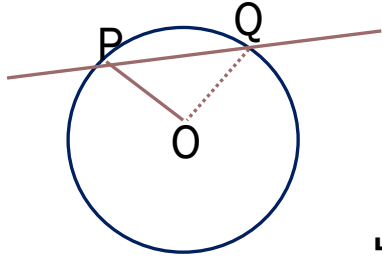
לכן OQ גדול מרדיוס המעגל ($OQ > R$). אבל $OP = R$.
סתירה! כי התקבל $R > OQ > R$.
לכן הנחה לא נכונה ו $OP \perp n$.

משפטים:

1. רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
2. אם מנקודה מחוץ למעגל מעבירים עליו שני משיקים אז מתקיים:
א. הקטעים של המשיקים בין הנקודה המשותפת לנקודות ההשקה שווים זה לזה
ב. הישר שעובר דרך הנקודה המשותפת ומרכז המעגל חוצה זווית בין המשיקים
ג. הישר שעובר דרך הנקודה המשותפת ומרכז המעגל חוצה זווית בין רדיוסים שמעבירים לנקודות ההשקה
ד. הישר שעובר דרך הנקודה המשותפת ומרכז המעגל חוצה את המיתר שמחבר נקודות ההשקה

משפט הפוך:

אם למעגל וישר יש נקודה משותפת ורדיוס מאונך לישר בנקודה זו אז הישר הוא משיק למעגל



נתון: מעגל O
n ישר
 $P = n \cap O$
 $OP \perp n$

צ.ל. n משיק למעגל

הוכחה: על פי הגדרת המשיק, כדי להוכיח ש n משיק למעגל צריך להוכיח ש P היא הנקודה המשותפת היחידה לישר ולמעגל.

נניח בשלילה שקיימת נקודה משותפת נוספת Q. נעביר רדיוס OQ.

$OQ = OP$ כי רדיוסים של אותו מעגל. לכן $\angle Q = \angle P$ (במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות). ($\triangle OPQ$)

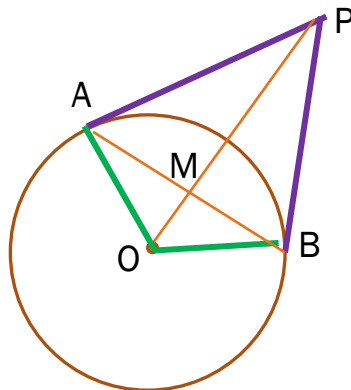
$\angle P = 90^\circ$ על פי הנתון. לכן גם $\angle Q = 90^\circ$.

סתירה! כי בלתי אפשרי שבאותו משולש יש שתי זוויות ישרות.

לכן הנחה לא נכונה, לישרים אין נקודות נוספות משותפות ו הישר n משיק למעגל על פי הגדרה.

נימוק	טענה	
	נחפוף $\triangle OBP$ ו $\triangle OAP$	1
רדיוס מאונך למשיק בנקודת השקה	$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$	
רדיוסים של אותו מעגל	$OA = OB$	
צלע משותפת	$OP = OP$	
צ.צ.ז. מול הצלע הגדולה (90°)	$\triangle OBP \cong \triangle OAP$	
צ.מ.ב.ח.	$PB = AP$	2
ז.מ.ב.ח. ($OB = OA$)	$\angle APO = \angle BPO$	3
ז.מ.ב.ח. ($BP = AP$)	$\angle AOP = \angle BOP$	4
נתון, 2	$APBO$ דלתון	5
אלכסון הראשי של דלתון מאונך לאלכסון המישני וחוצה אותו	$OP \perp AB$ $MB = AM$	6
	מ.ש.ל.	

המעגל משיק



נתון: מעגל O
 BP, AP משיקים למעגל
 $A = AP \cap O$
 $B = BP \cap O$

צ.ל.:
 א. $PB = PA$
 ב. $\angle APO = \angle BPO$
 ג. $\angle AOP = \angle BOP$
 ד. $OP \perp AB$
 אם $M = OP \cap AB$
 אז $MB = AM$

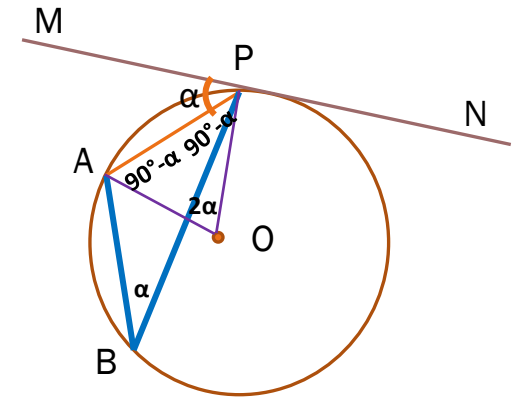
משפט:

- אם מנקודה מחץ למעגל מעבירים עליו שני משיקים אז מתקיים:
- א. הקטעים של המשיקים בין הנקודה המשותפת לנקודות השקה שווים זה לזה
- ב. הישר שעובר דרך הנקודה המשותפת ומרכז המעגל חוצה זווית בין המשיקים
- ג. הישר שעובר דרך הנקודה המשותפת ומרכז המעגל חוצה זווית בין רדיוסים שמעבירים לנקודות השקה
- ד. הישר שעובר דרך הנקודה המשותפת ומרכז המעגל חוצה את המיתר שמחבר נקודות ההשקה ומאונך לו.

המעגל

משיק

משפט: זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית שנשענת על אותה קשת



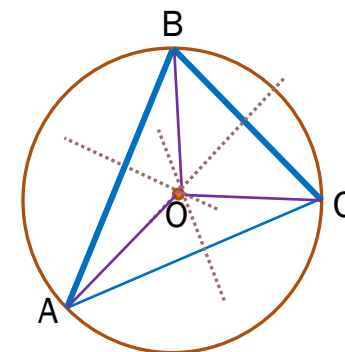
נתון: מעגל O
MN משיק, AP מיתר
 $P = MN \cap O$
 $\angle ABP$ היקפית
צ.ל. $\angle MPA = \angle ABP$

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר רדיוסים OA, OP	1
	נסמן $\angle MPA = \alpha$	2
רדיוסים של אותו מעגל	$OA = OP$	3
רדיוס מאונך למשיק בנקודת השקה	$\angle OPM = 90^\circ$	4
2,4	$\angle OPM = 90^\circ - \alpha$	5
במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות ($\triangle AOP$), 3,5	$\angle OAP = 90^\circ - \alpha$	6
סכום זוויות במשולש ($\triangle AOP$), 5,6	$\angle AOP = 2\alpha$	7
זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת	$\angle ABP = \frac{1}{2} \widehat{AP} - \frac{1}{2} \angle AOP = \frac{1}{2} \times 2\alpha = \alpha$	8
8, 2	$\angle ABP = \angle MPA$	9
	מ.ש.ל	

מצולע חסום

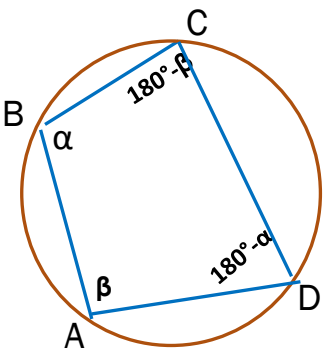
הגדרה: מצולע חסום במעגל הוא מצולע שכל הקודקודים שלו נמצאים על המעגל

משפט: סביב כל משולש אפשר לחסום מעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של אנכים האמצעים לצעות המשולש



- הוכחה:** נשתמש בשתי טענות:
1. שלושה אנכים אמצעים של המשולש נפגשים בנקודה אחת
 2. אנך אמצעי לקטע הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מקצות הקטע
 3. לכן אם m, n, k אנכים אמצעים לצלעות המשולש ABC $O = m \cap n \cap k$ אזי $OC = OB = OA$
 4. לכן נקודה O נמצאת במרחקים שווים מנקודות A, B, C , זאת אומרת O מרכז המעגל העובר דרך נקודות האלה.
 6. על פי הגדרה המשולש חסום במעגל (המעגל חוסם את המשולש).

משפט: סכום של זוויות נגדיות במרובע חסום שווה ל 180°



נתון: מעגל O
 ABCD מרובע חסום
 צ.ל. $\angle C + \angle A = 180^\circ$
 $\angle B + \angle D = 180^\circ$

הוכחה:

זווית היקפית במעגל שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \angle BAD = \frac{1}{2} \widehat{BCD} \\ 2. \angle BCD = \frac{1}{2} \widehat{BAD} \end{array} \right.$$

$$\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2} \widehat{BCD} + \frac{1}{2} \widehat{BAD}$$

$$\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2} (\widehat{BCD} + \widehat{BAD})$$

$$\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ$$

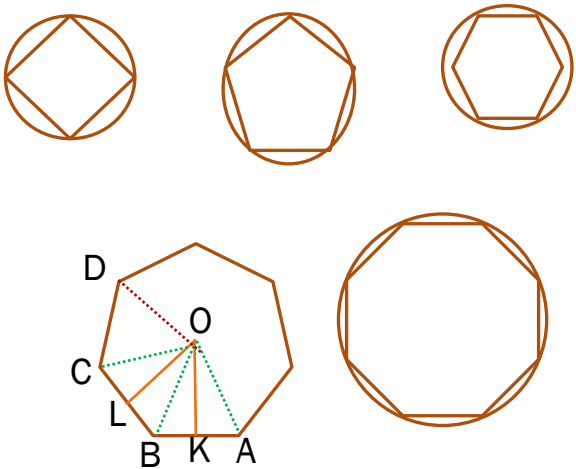
באותו אופן

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

מ.ש.ל.

נימוק	טענה	
אנך אמצעי הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מקצוות הקטע	$OA=OB=OC$	1
סכום זוויות במצולע משוכלל, כל הזוויות שוות	$\angle A = \angle B = \angle C = \dots = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$	2
רדיוסים של אותו מעגל שווים, במצולע משוכלל כל הצלעות שוות, צ.צ.צ.	$\triangle AOB \cong \triangle BOC$	3
ז.מ.ב.ח.®	$\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB$	4
4	$\angle OBA = \angle OBC = \frac{1}{2} \angle B$	5
$\angle B = \angle C, 5$	$\angle OCB = \frac{1}{2} \angle C$	6
צ.ז.צ.(5,6,CB=CD,R)	$\triangle OCB \cong \triangle ODC$	7
צ.מ.ב.ח.	$OC=OD$	8
ז.מ.ב.ח.(OB=OA)	באותו אופן גם שאר הקודקודים נמצאים באותו מרחק מ O לכן כל הקודקודים נמצאים על המעגל.	9
	מ.ש.ל.	

מצולע חסום



נתון: מצולע משוכלל ABCD...
צ.ל.: קיים מעגל O כך ש
 $OA=OB=OC=OD=...$

הוכחה:

נסמן K – אמצע AB, L – אמצע BC
נעלה אנכים אמצעים:
OK⊥AB, OL⊥BC
נוכיח $OA=OB=OC=OD=...$

מצולע משוכלל חסום

הגדרה: מצולע חסום במעגל הוא מצולע שכל הקודקודים שלו נמצאים על המעגל

משפט: סביב כל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של אנכים האמצעים לצעות המצולע

נשים לב שבשביל למצוא מרכז המעגל החוסם את המצולע המשוכלל מספיק למצוא נקודת החיתוך של שני אנכים אמצעים

מרחב חסום

משפט: מרחב הוא בר חסימה אם ורק אם יש לו זוג זוויות נגדיות שסכומן 180°

הוכחה:

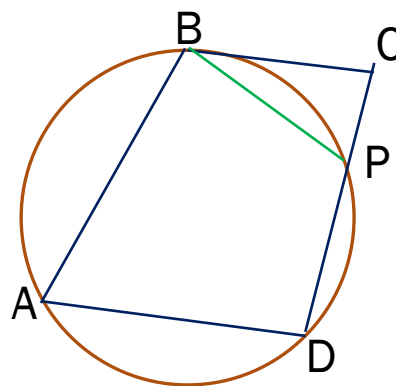
כיוון אחד הוכחנו קודם: במרחב חסום סכום זוויות נגדיות שווה ל 180° .

כיוון שני: נוכיח שאם במרחב יש שתי זוויות נגדיות שסכומן 180° אז קיים מעגל שעובר דרך כול הקודקודים של המרחב.

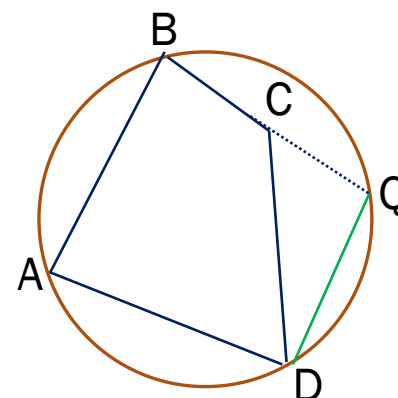
כמו שהוכחנו קודם דרך שלוש נקודות תמיד עובר מעגל.

נניח בשלילה שמעגל זה לא עובר דרך קודקוד הרביעי.

משפטים הפוכים



הקודקוד הרביעי מחוץ למעגל

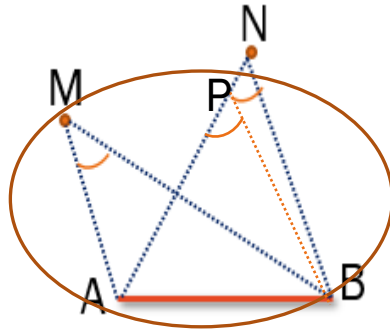
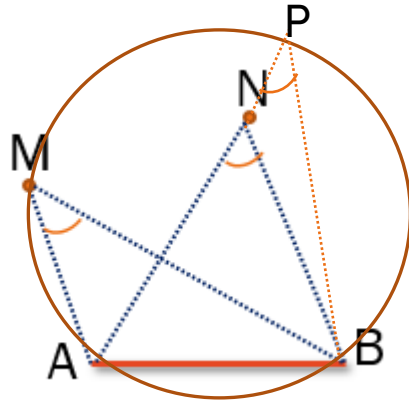


הקודקוד הרביעי בתוך המעגל

1. נעביר מיתר BP (P נקודת החיתוך של DC עם המעגל)
2. $\angle A + \angle BPD = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרחב חסום)
3. $\angle A + \angle C = 180^\circ$ (נתון)
4. $\angle BPD = \angle C$ על פי 2,3
5. $\angle BPD > \angle C$ (זווית חיצונית ל $\triangle BPC$)
6. סתירה בין 4 ו 5. לכן הנקודה C לא נמצאת מחוץ למעגל.
1. נמשיך את BC עד לחיתוך עם המעגל (נקודה Q), נעביר מיתר DQ
2. $\angle A + \angle BQD = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרחב חסום)
3. $\angle A + \angle BCD = 180^\circ$ (נתון)
4. $\angle BQD = \angle BCD$ על פי 2,3
5. $\angle BCD > \angle BQD$ (זווית חיצונית ל $\triangle CQD$)
6. סתירה בין 4 ו 5. לכן הנקודה C לא נמצאת בתוך המעגל.
7. אין אפשרויות אחרות למיקום של נקודה C. לכן היא נמצאת על המעגל

מצולע חסום

הוכחה:



כמו שהוכחנו קודם דרך שלוש נקודות B,M,A עובר מעגל

1. נניח בשלילה שנקודה N לא נמצאת על מעגל זה.

2. קיימות שתי אפשרויות: הנקודה N נמצאת בתוך המעגל או נקודה N נמצאת מחוץ למעגל. נניח בלי הגבלת הכליות ש N נמצאת בתוך המעגל.

3. נמשיך את AN עד לחיתוך עם המעגל (נקודה P) ונעביר מיתר PB.

4. $\angle APB = \angle ANB$ היקפית, נשענת על הקשת $\widehat{AB}$.

5. $\angle AMB = \angle ANB$ היקפית, נשענת על הקשת $\widehat{AB}$.

6. $\angle AMB = \angle ANB$ כי זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת שוות זו לזו

7. $\angle AMB = \angle ANB$ על פי הנתון

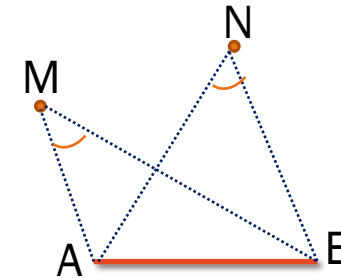
8. $\angle APB = \angle ANB$ על פי 7,8

9. סתירה! כי זווית חיצונית גדולה מזווית פנימית של המשולש ($\triangle BPN$).

10. לכן הנחה לא נכונה ונקודה N נמצאת על המעגל.

הגדרה: מצולע חסום במעגל הוא מצולע שכל הצלעות שלו הם משיקים למעגל

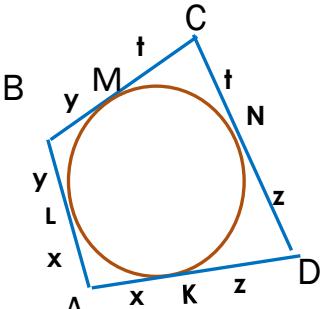
משפט: אם שתי נקודות נמצאות מצד אחד של קטע נתון ומשתי הנקודות האלה רואים את הקטע באותה זווית אז הנקודות וקצוות הקטע נמצאות על אותו מעגל (אותה קשת של המעגל).



נתון: קטע AB
N,M נקודות מצד אחד של הקטע
 $\angle AMB = \angle ANB$
צ.ל. קיים מעגל O
 $M, B, A, N \in O$

מצולע חוסם

משפט: סכום של שתי צלעות נגדיות במרובע חוסם שווה ל סכום של שתי הצלעות הנגדיות האחרות שלו



נתון: מעגל O
ABCD מרובע חוסם
נק' השקה L, K, N, M
צ.ל.: $AD+BC=CD+AB$

הוכחה:

אם מנקודה מחוץ למעגל מעבירים עליו שני משיקים אז הקטעים שמחברים את הנקודה עם נקודות השקה שווים זה לזה

$$\left. \begin{array}{l} AK=AL=x \\ BL=BM=y \\ CM=CN=t \\ DN=DK=z \end{array} \right\}$$

$$AB+CD=x+y+t+z$$

$$BC+AD=y+t+z+x$$

לכן

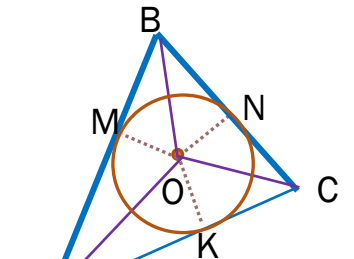
$$AB+CD=BC+AD$$

מ.ש.ל.

- הוכחה:** נשתמש בשתי טענות:
1. שלושה חוצי זוויות של המשולש נפגשים בנקודה אחת
 2. חוצה זווית הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים צלעות הזווית
 3. לכן אם CO, BO, AO חוצי זוויות של המשולש $O=A0 \cap BO \cap CO \mid ABC$
 4. $OM=ON=OK$ הם מרחקים MO, NO, KO (מנקודה O לצלעות המשולש)
 5. לכן נקודה O נמצאת במרחקים שווים מנקודות M, N, K , זאת אומרת O מרכז המעגל העובר דרך נקודות האלה.
 6. למעגל ולכל אחת מהצלעות יש נקודה משותפת, רדיוסים OK, ON, OM מאונכים לצלעות המשולש בנקודה זו (מרחקים) לכן על פי משפט הפוך למשפט על רדיוס ומשיק צלעות המשולש הם מיקים למעגל.
 7. $\triangle ABC$ חוסם את המעגל על פי ההגדרה.

הגדרה: מצולע חוסם את המעגל הוא מצולע שכל הצלעות שלו הם משיקים למעגל

משפט: בתוך כל משולש אפשר לחסום מעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של חוצי זוויתת המשולש



נשים לב, ששלישיות הנקודות N, O, A , K, O, B , M, O, C לא נמצאות על ישר אחד

מרובע חוסם

משפט: אפשר לחסום מעגל בתוך מרובע אם ורק אם סכום של שתי הצלעות הנגדיות שלו שווה לסכום של שתי הצלעות האחרות.

הוכחה:

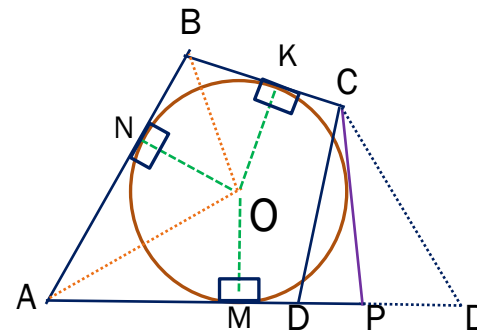
כיוון אחד הוכחנו קודם: אם מרובע חוסם את המעגל אז סכום הצלעות הנגדיות שלו שווה לסכום של שתי הצלעות האחרות.

כיוון שני: נוכיח שאם במרובע סכום של שתי צלעות נגדיות שווה לסכום של שתי צלעות אחרות אז בוודאות אפשר לחסום בתוכו מעגל.

כמו שהוכחנו קודם דרך שלוש נקודות תמיד עובר מעגל.

נניח בשלילה שהטענה לא מתקיימת כלומר $AB+CD \neq AD+BC$ אבל לא קיים מעגל שכל הצלעות של המרובע משיקות לו.

משפטים הפוכים

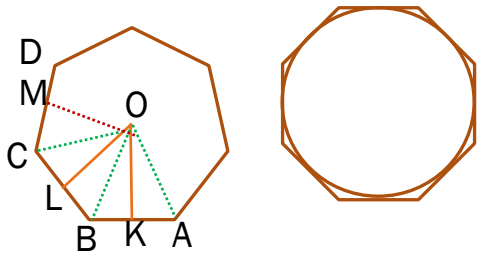
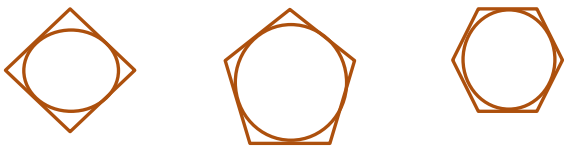


1. נעבר חוצי זוויות A ו- B . הם נפגשים בנקודה O שנמצאת במרחקים שווים מקטעים AB ו- AD , כי חוצה זווית הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מצלעות הזווית.
2. נוריד: $OM \perp AD, ON \perp AB, OK \perp BC$ (מרחקים)
3. $OK=ON=OM$ על פי 1 ו-2.
4. נקודה O נמצאת במרחקים שווים מנקודות K, N, M לכן קיים מעגל עם מרכז בנקודה O שעובר דרך נקודות האלה.
5. AB, BC, AD משיקים למעגל זה כי לכל אחד מהם יש נקודה משותפת עם המעגל ורדיוסים מאונכים להם בנקודות האלה.
6. על פי ההנחה CD לא משיק למעגל זה. CD נמצא מחוץ למעגל או חותך אותו כמו שמתואר על השרטוטים.
7. נניח בלי הקבלת הכליות ש CD חותך את המעגל.
8. נעביר דרך נקודה C משיק למעגל. נסמן $P=CP \cap AD$ (משיק)

8. המרובע חוסם את $ABCP$ המעגל לכן
- $AB+CP=BC+AP=BC+AD+DP$
9. על פי הנתון
- $AB+CD=BC+AD$
10. על פי 8 ו-9
- ~~$AB+CP=AB+CD+DP$~~
- $CP=CD+DP$
11. על פי אי שוויון המשולש
- $CP < CD+DP$
12. סתירה! לכן בלתי אפשרי ש CP מחוץ למעגל. באותו אופן CD גם לא חותך המעגל. לכן CD משיק.

נימוק	טענה	
חוצה זווית הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מצלעות הזווית	$OK=OL$	1
במצולע משוכלל כל הזוויות שוות, נתונים חוצי זוויות	$\angle OAK = \angle OBK = \angle OBL$	2
2, נתון, 1, ז.ז.צ.	$\triangle OKA \cong \triangle OKB \cong \triangle OLB$	3
צ.מ.ב.ח. במצולע משוכלל כל הצלעות שוות	$KA=KB=BL=\frac{1}{2}CB$	4
	$CL=CB-BL=CB-\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}CB$	5
ז.ז.צ. (נתון, 4, 5, $CL=LB, OL$)	$\triangle OLC \cong \triangle OLB$	6
צ.מ.ב.ח., כל הזוויות במצולה משוכלל שוות זו לזו	$\angle OCL = \angle OBL = \frac{1}{2}\angle C$	7
7, כמו 1	$\angle OCM = \angle C - \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle C$ לכן CO חוצה זווית C ו $OL=OM$	8
	לכן גם נקודה M נמצאת על המעגל שמרכזו O ורדיוס $OM=OL=OK$	8
	AB, BC, CD משיקים למעגל זה כי לכול אחד מהם יש נקודה משותפת עם המעגל ורדיוסים מאונכים להם בנקודות אלה. וכך גם עם שאר הצלעות..	9
	מ.ש.ל.	

מצולע חוסם



נתון: מצולע משוכלל ABCD...
צ.ל.: קיים מעגל O כך ש
 $AB, BC, CD, \dots$ משיקים למעגל

הוכחה:
נעביר חוצי זוויות OB, OA
נוריד
 $OL \perp BC, OK \perp AB, OM \perp CD$
נוכיח ש $OM=OK=OL$

מצולע משוכלל חוסם

הגדרה: מצולע חוסם את המעגל הוא מצולע שכל הצלעות שלו הם משיקים למעגל

משפט: בתוך כל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של חוצי זווית המצולע

נשים לב שבשביל למצוא מרכז המעגל החסום במצולע משוכלל מספיק למצוא נקודת החיתוך של שני חוצי זוויות

שני מעגלים

מעגלים משיקים



מעגלים משיקים מבחוץ מעגלים משיקים מבפנים

משפט: אם שני מעגלים משיקים מבפנים

או מבחוץ אז מרכזים המעגלים ונקודת

ההשקה נמצאים על ישר אחד

מעגלים משיקים מבחוץ

נניח בשלילה שנקודות M, P, O לא על ישר אחד.

נעביר רדיוסים MP ו- OP וקטע OM.

נוצר משולש OPM שבו על פי אי שוויון המשולש

$OP + PM > OM$. לכן $R + r > OM$

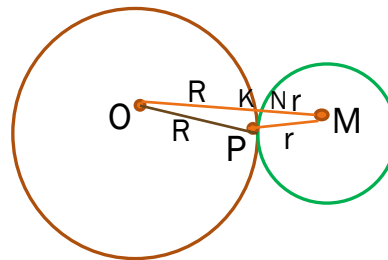
נסמן נקודת החיתוך עם המעגלים N, K.

$OM = OK + KN + NM = R + KN + r$

התקבל: $R + r > R + KN + r$. סתירה! לכן ההנחה לא

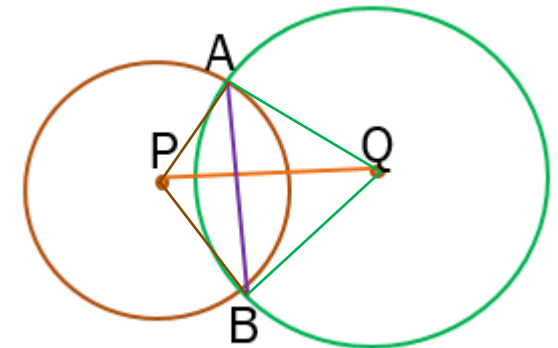
נכונה ונקודות נמצאות על ישר אחד.

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר רדיוסים PB, PA, OB, OA	1
רדיוסים של אותו מעגל שווים זה לזה	$BP = AP, BO = AO$	2
2	AOBP דלתון	3
אלכסון הראשי של דלתון מאונך לאלכסון המשני וחוצה אותו	PO אנך אמצעי ל AB	4
	מ.ש.ל	



מעגלים נחתכים

משפט: קטע מרכזים של שני מעגלים נחתכים מאונך למיתר המשותף שלהם וחוצה אותו.



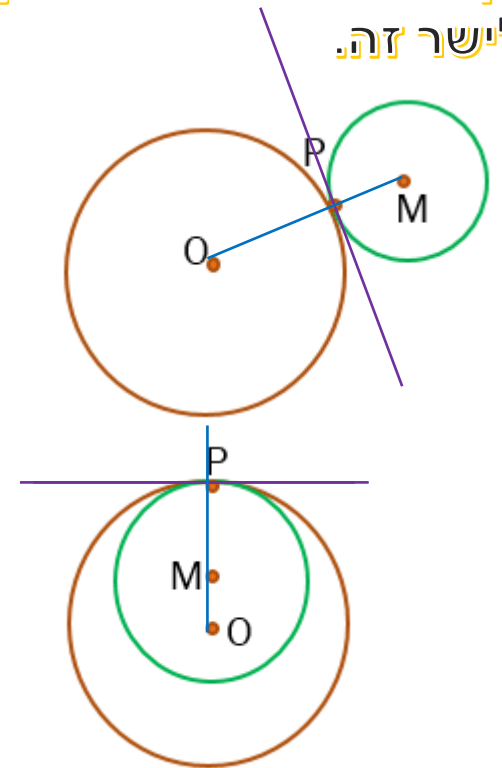
נתון: מעגל O, מעגל P

$B = P \cap O, A = P \cap O$

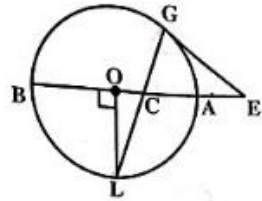
צ.ל. PO אנך אמצעי ל AB

מעגלים משיקים

משפט: אם שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים או מבחוץ אז יש להם משיק משותף שעובר דרך נקודת השקה שלהם וקטע מרכזים מאונך לישר זה.

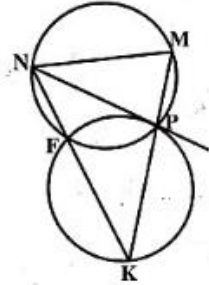


שני מעגלים



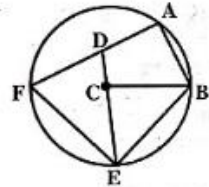
29. EG הוא משקי, AB – קוטר ו-OL הוא רדיוס המאונך לקוטר AB במעגל שמרכזו O. הקטע LG חותך את הקוטר בנקודה C.

הוכח: ECG הוא משולש שווה שוקיים.

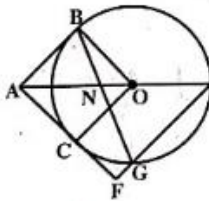


30. שני מעגלים בעלי רדיוסים שווים נחתכים בנקודות P ו-F. PK הוא מיתר במעגל והחתך המשכו חותך את המעגל העליון בנקודה M. N היא נקודה על המעגל העליון כך שהנקודות N, F, K נמצאות על ישר אחד ו-NP – משיק למעגל התחתון.

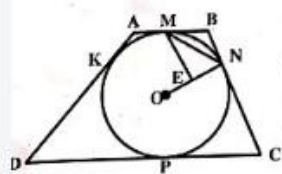
א. הוכח: $PK = MN = NP$.
(תמצא: במעגלים שווים זוויות היקפיות שוות נשענות על מיתרים שווים).
ב. נתון: $\angle PFK - \angle PNF = 30^\circ$.
הוכח: FK הוא קוטר המעגל התחתון.



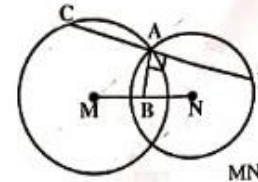
31. EF ו-EB הם מיתרים שווים במעגל שמרכזו C. המשך הקטע EC חותך את המיתר AF בנקודה D. הוכח: אפשר לחסום במעגל את המרובע ABCD.
ב. נתון: $\angle DEF = \alpha$.
הבע באמצעות α את זוויות המרובע ABCD.
ג. חשב את α עבורה $BC \parallel DA$.



32. AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-A ומאונכים זה לזה ($\angle BAC = 90^\circ$).
נתון: $EF \perp AC$.
הוכח:
א. המרובע ABOC הוא ריבוע.
ב. $AN = EO$.



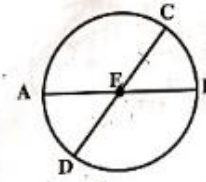
33. צלעותיו של טרפז ABCD משיקות למעגל שמרכזו O בנקודות M, N, K ו-P.
א. הוכח: i. $\angle AOD = 90^\circ$.
ii. MP – קוטר המעגל.
ב. נתון: $ME \perp ON$.
הוכח: MN חוצה את הזווית $\angle BME$.



3. נתונים שני מעגלים N ו-M הנחתכים בנקודה A. $AB \perp CD$, הנקודה B היא אמצע הקטע MN.

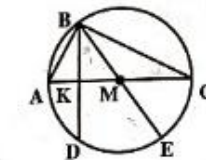
הוכח: $AC = AD$.
הבחן בין שני מקרים: א. $CD \parallel MN$, ב. $MN \not\parallel CD$.

4. הוכח: אם טרפז חסום במעגל, אז הוא טרפז שווה שוקיים.



5. AB הוא קוטר ו-CD הוא מיתר במעגל. נתון: $\angle BEC \neq 90^\circ$, $CE = ED$.
הוכח: E – מרכז המעגל.

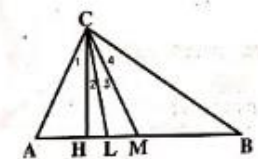
הצעה לפתרון: העבר אנך ל-CD דרך הנקודה E.



6. במשולש ABC שקודקדיו על המעגל נתון: $\angle ABK = \angle MBC$, $AM = MC$, $BD \perp AC$.

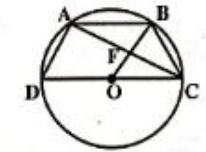
הוכח:
א. BE – קוטר במעגל.
ב. M – מרכז המעגל.
ג. חשב את אורך הקטע BC אם נתון כי $\angle KBM = \angle CAE$, $BD = 5$ ס"מ.

השובות: 5 ג 5 ס"מ.



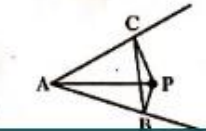
7. במשולש ABC נתון: $AC \neq BC$, CM – חיתוך, CH – גובה, CL – חוצה זווית. נתון: $\angle C = 90^\circ$.
א. חשב את $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$.
הצעה לפתרון: המשך את הקרנות

העזר: CH ו-CL, CM חוצים את המשולש ABC החסום את הטענה ההפוכה ל-(א).
ב. נסח והוכח את הטענה ההפוכה ל-(א).
ג. נתון: $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3 = \angle C_4$. חשב את זוויות המשולש ABC.



8. מעגל שמרכזו O חוסם טרפז ABCD. נתון: $\angle BFC = 84^\circ$.
א. חשב את זוויות הטרפז.
ב. ללא קשר לנתון $\angle BFC = 84^\circ$ מצא מה צריך להיות גודלה של $\angle BFC$ על מנת שיתקיים: $\angle D = 4\angle BAC$.

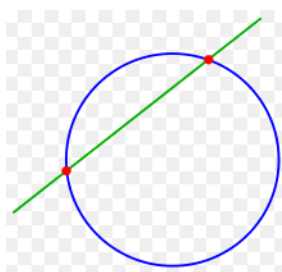
השובות: א. $118^\circ, 62^\circ, 118^\circ, 62^\circ$; ב. 54° .



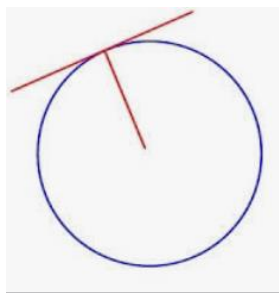
9. בנקודה P שנמצאת בתוך הזווית החדה $\angle A$ הורדו אנכים לשוקי הזווית: $BP \perp AB$, $CP \perp AC$.
הוכח: $\angle CAP = \angle CBP$.

גיאומטריה
מכינה 2025
יחידה שישית-
שבועית (שיעורים
(16-18,19-21)



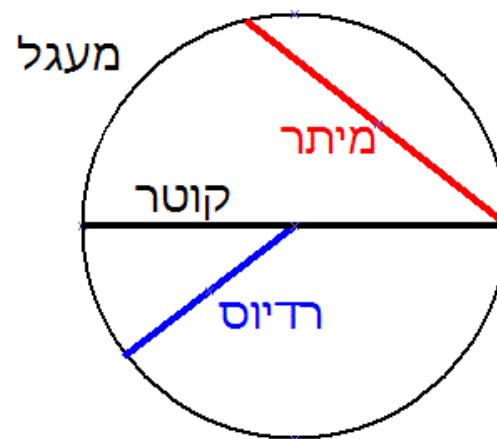


הגדרה: חותך הוא ישר שיש לו ולמעגל שתי נקודות משותפות בלבד



הגדרה: משיק הוא ישר שיש לו עם המעגל נקודה אחת משותפת בלבד. לנקודה זו קוראים **נקודת ההשקה**.

המעגל



הגדרה: מיתר הוא קטע שמחבר בין שתי נקודות על המעגל.

הגדרה: קוטר הוא מיתר שעובר דרך מרכז המעגל.

הגדרה: מעגל הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות במישור שנמצאות במרחקים שווים מנקודה שנקראת מרכז המעגל

הגדרה: רדיוס הוא קטע שמחבר המרכז המעגל עם נקודה שעליו

❖ למעגל יש אינסוף רדיוסים שכולם שווים זה לזה

❖ מקובל להשתמש במילה "רדיוס" גם עבור אורך הרדיוס.

❖ על פי אקסיומה של אוקלידס כל מעגל מוגדר חד משמעית על ידי המרכז והרדיוס שלו.

המעגל

הגדרה: זווית מרכזית

הוא זווית שקודקודה במרכז המעגל והצלעות הן רדיוסים של המעגל

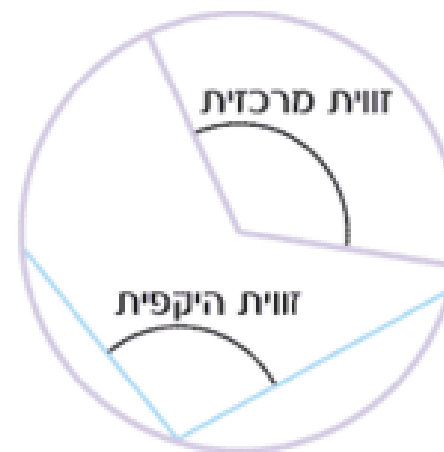
הגדרה: קשת הוא היא

חלק של המעגל הנמצא בין שתי נקודות שעליו

הגדרה: זווית היקפית

הוא זווית שקודקודה על המעגל והצלעות הן מיתרים של אותו מעגל

❖ לכל זווית מרכזית ולכל זווית היקפית מתאימה קשת. אומרים "הזווית נשענת על קשת"



הגדרה: זווית חיצונית

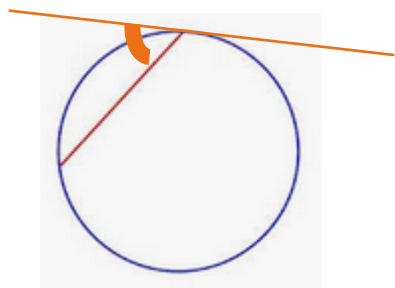
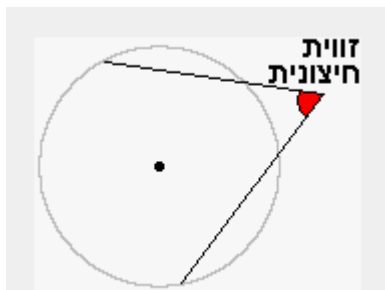
היזווית שקודקודה מחוץ למעגל והצלעות הן חלקי החותכים של המעגל

הגדרה: זווית פנימית

הוא זווית שקודקודה בתוך המעגל והצלעות הן חלקי המיתרים

הגדרה: זווית בין משיק למיתר הוא זווית

שקודקודה בנקודת ההשקה מש המשיק, קרן אחת היא לק של משיק וקרן השנייה היא מיתר שאחד הקצוות שלו נקודת ההשקה



המעגל

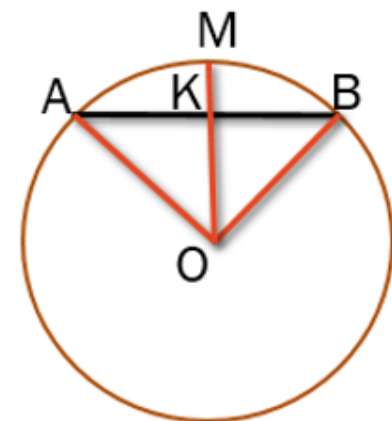
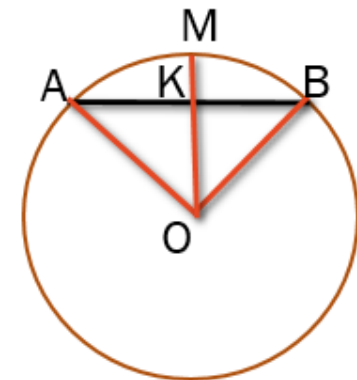
משפט: רדיוס מאונך למיתר
אם ורק אם הוא חוצה אותו

כיוון ראשון

נתון: מעגל O
 OM רדיוס
 AB מיתר
 $K = AB \cap OM$
 $OM \perp AB$
 צ.ל. $AK = KB$

כיוון שני

נתון: מעגל O
 OM רדיוס
 AB מיתר
 $K = AB \cap OM$
 $AK = KB$
 צ.ל. $OM \perp AB$



הוכחה:

1. נעביר רדיוסים OA, OB
2. $OB = OA$ כי רדיוסים של אותו מעגל
3. $\triangle AOB$ שווה שוקיים, על פי 2
4. במשולש שווה שוקיים תיכון וגובה לבסיס מתלכדים לכן
5. $AK = KB \iff AK \perp KB$ מ.ש.ל. שני הכיוונים

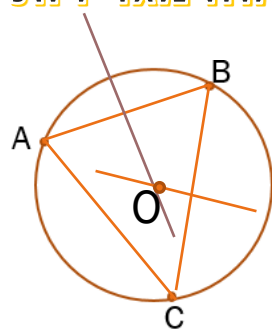
משפט: שלוש נקודות שלא

נמצאות על ישר אחד מגדירות

מעגל אחד ויחיד.

הוכחה:

1. מעגל מוגדר על ידי מרכז ורדיוס שלו.
2. שלוש נקודות מגדירות משולש
3. שלושה אנכים אמצעים לצלעות המשולש נפגשים בנקודה אחת שנמצאת במרחקים שווים מקודקודי המשולש.
4. נקודה זו היא מרכז המעגל והמרחק שלה מהקודקודים הוא רדיוס.



משפט (הפוך): אנך אמצעי

למיתר המעגל עובר דרך מרכז

המעגל.

נתון: מעגל O

OM רדיוס

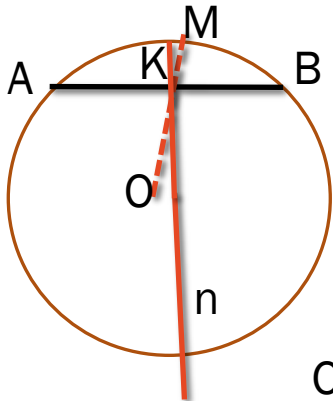
ישר $n, K = AB \cap n$

$n \perp AB, AK = KB$

צ.ל. $O \in n$

הוכחה:

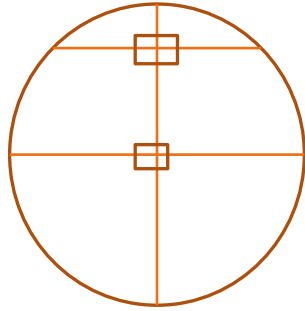
1. נניח בשלילה ש $O \notin n$
2. אם כך נעביר דרך נקודות O ו K רדיוס המעגל OM
3. OM רדיוס שחוצה את המיתר AB (עובר דרך K אמצע AB)
4. לכן על פי המשפט $OM \perp AB$ סתירה! כי בלתי אפשרי לעלות באותה נקודה שני אנכים שונים לאותו קטע. לכן ההנחה לא נכונה ו $O \in n$ מ.ש.ל.



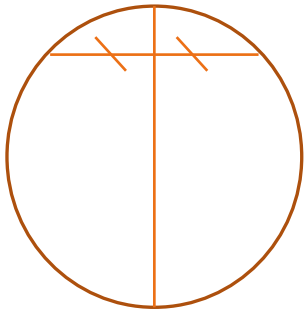


מה יקרה אם נחליף רדיוס לקוטר?

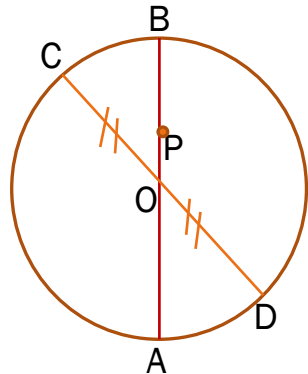
אם קוטר מאונך למיתר
אז הוא חוצה אותו (גם
אם המיתר הוא גם
קוטר



אם קוטר חוצה את למיתר אז או שהוא
מאונך לו או שהמיתר השני הוא גם קוטר



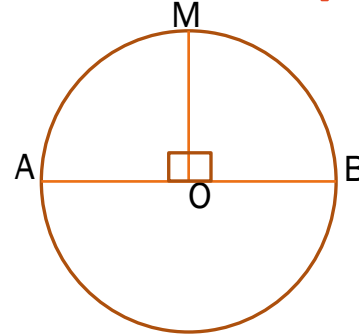
אם O לא מרכז המעגל אז קיים $P \in AB$ מרכז
המעגל שעבורו מתקיים $PA \perp CD$. לכן אם הם
לא מאונכים אז CD קוטר



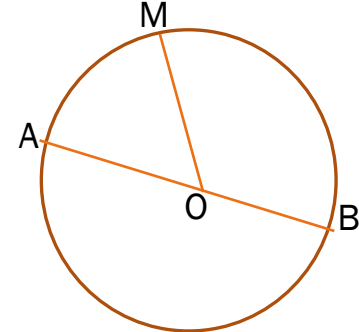
שאלות לדיון

המשפט הוכח במקרה שהמיתר
הוא לא קוטר.

מה יקרה אם המיתר הוא קוטר?



הכיוון הראשון מתקיים:
 $MO \perp AB, AO = OB$

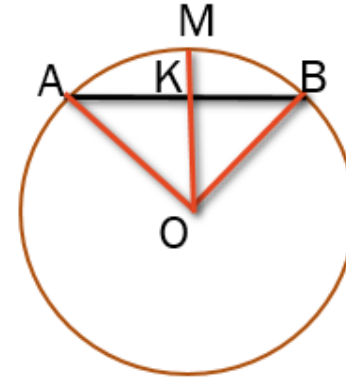


הכיוון השני לא מתקיים:
רדיוס לא בהכרח מאונך לקוטר
למרות ש $AO = OB$

משפט: רדיוס מאונך למיתר
אם ורק אם הוא חוצה אותו

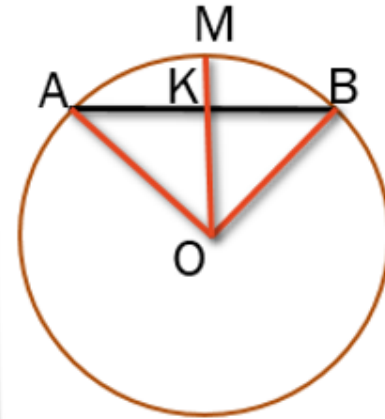
כיוון ראשון

נתון: מעגל O
רדיוס OM
מיתר AB
 $K = AB \cap OM$
 $OM \perp AB$
צ.ל. $AK = KB$



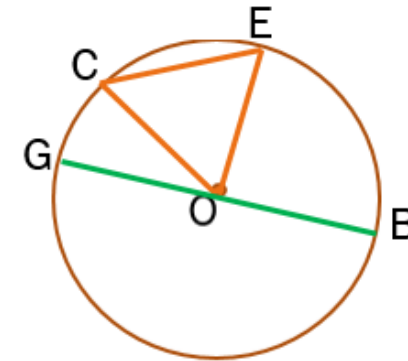
כיוון שני

נתון: מעגל O
רדיוס OM
מיתר AB
 $K = AB \cap OM$
 $AK = KB$
צ.ל. $OM \perp AB$



המעגל

משפט: קוטר הוא מיתר הכי ארוך במעגל

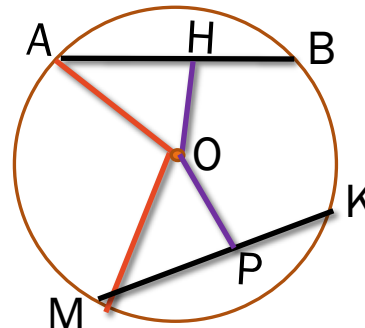


נתון: מעגל O
GB קוטר
CE מיתר
צ.ל. $GB > CE$

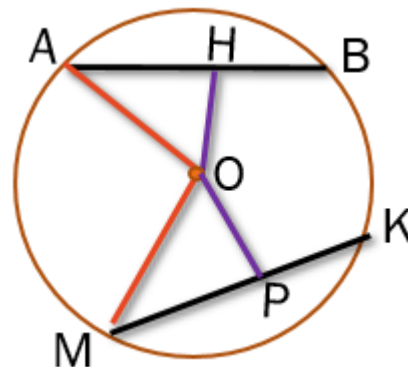
הוכחה:

1. נעביר רדיוסים OC ו OE (ב.ע.)
2. $OC + OE > CE$ (אי שוויון המשולש ב $\triangle OCE$)
3. $GB = OC + OE$ (הגדרת הקוטר)
4. $GB > CE$ (ע"פ 2,3) מ.ש.ל.

משפט: שני מיתרים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל אם ורק אם הם שווים זה לזה.



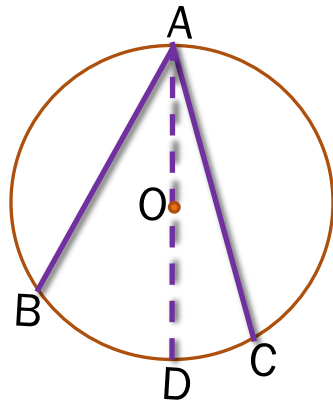
כיוון ראשון
נתון: מעגל O
AB, MK מיתרים
 $OH \perp AB$
 $OP \perp MK$
 $MK = AB$
צ.ל. $OP = OH$



כיוון שני
נתון: מעגל O
AB, MK מיתרים
 $OH \perp AB$
 $OP \perp MK$
 $OP = OH$
צ.ל. $AB = MK$

הוכחה (כיוון ראשון):

1. נעביר רדיוסים OA, OM
 2. $OM = OA$ כי רדיוסים של אותו מעגל
 3. $OH \perp AB$
 4. $HB = AH$ על פי המשפט: רדיוס שמאונך למעגל חוצה אותו
 5. $PK = MP$ כמו 3,4
 6. $MK = AB$, נתון
 7. $MP = AH$, על פי 4-6
 8. נחפוף $\triangle MOP$ ו $\triangle AOH$
 $OM = AO$ על פי 2
 $MP = AH$ על פי 7
 $\angle H = \angle P = 90^\circ$, נתון
 $\triangle MOP \cong \triangle AOH$ על פי צ.צ.ז. מול הצלע הגדולה (90°)
 9. $OP = OH$ צ.מ.ב.ח.
- מ.ש.ל. כיוון הראשון
באותו אופן מוכחים גם את הכיוון השני.



ב

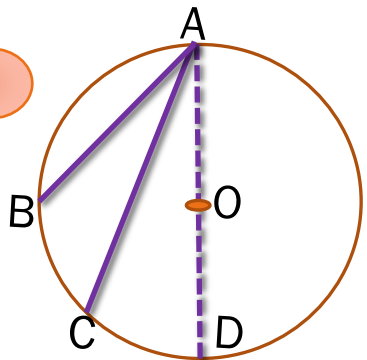
נוכיח מיקרה ב'.

1. נעביר קוטר AD
2. $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup CD$, $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BD$ על פי ההוכחה של מקרה א'

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \frac{1}{2} \cup BD + \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} \cup BC$$

נוכיח מיקרה ב'.

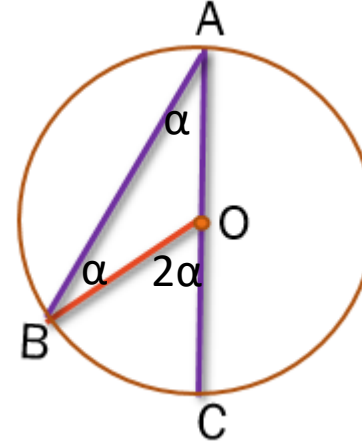
ג



1. נעביר קוטר AD
2. $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup CD$, $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BD$ על פי ההוכחה של מקרה א'
3. $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = \frac{1}{2} \cup BD - \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} \cup BC$

המעגל

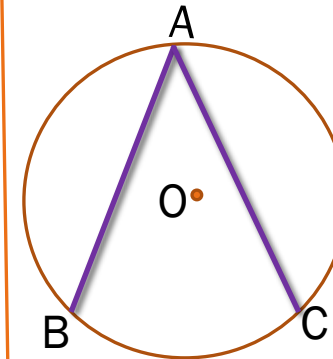
א



נוכיח תחילה את מיקרה א'.

1. נעביר רדיוס OB
2. $OB = OA$ כי רדיוסים של אותו מעגל
3. $OH \perp AB$
4. $\angle A = \angle B = \alpha$, במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות ($\triangle AOB$)
5. $\angle BOC = 2\alpha$, זווית חיצונית ל $\triangle AOB$
6. $\angle BOC = 2\alpha$, קשת שווה $\cup BC$
7. $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$, על פי 4, 6, מ.ש.ל.א'

משפט: זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת.



נתון: מעגל O
 $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$

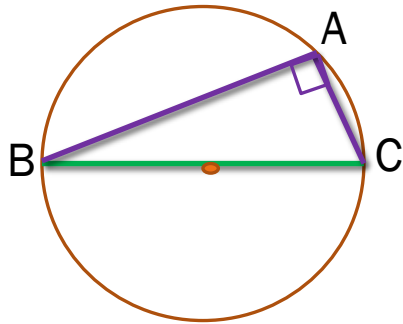
הוכחה:

- נבדיל בין שלושה מיקרים:
א. אחת הצלעות של הזווית ההיקפית היא קוטר
ב. הקוטר נמצא בין צלעות הזווית
ג. שתי צלעות הזווית נמצאות מצד אחד של הקוטר

המעגל

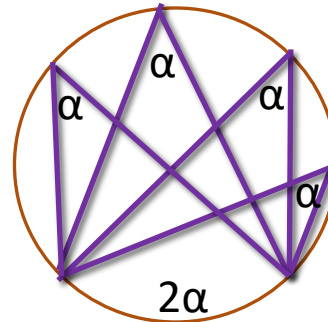
מסקנות מהמשפט על זווית היקפית

משפט: זווית היקפית שנשענת על הקוטר שווה ל 90°

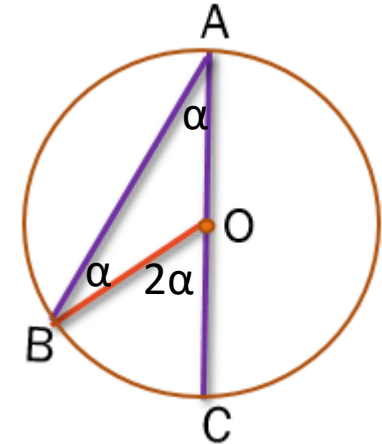


$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

משפט: כל הזוויות ההיקפיות שנשענות על אותה קשת או על קשתות שוות זו לזו



משפט: זווית היקפית שווה למחצית מזווית המרכזית מנשענת איתה על אותה קשת



$$\angle BOC = 2\angle BAC$$



שאלות חשיבה

הוכח או הפרך טענות
הבאות:

1. אם זווית היקפית
שנשענת על המיתר
שווה ל 90° אז המיתר
הוא קוטר

2. אם אחת משתי
זוויות שנשענות על
אותה קשת היקפית
והיא שווה למחצית
מזווית השנייה אז
הזווית השנייה היא
מרכזית.

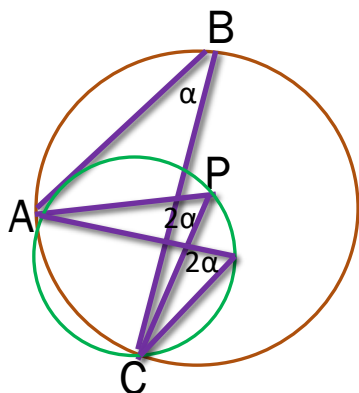
3. על מיתרים שווים נשענות
זוויות היקפיות שוות

4. אם זווית שקודקודה בתוך
המעגל שווה לקשת שעלייה
היא נשענת אז הזווית היא
זווית מרכזית וקודקודה מרכז
המעגל.



המעגל

טענות הפוכות למשפט על זווית היקפית



למרות ש $\angle APC = 2\angle ABC$ נקודה P לא בוודאות מרכז המעגל כי כל הנקודות שנמצאות על המעגל הירוק שוות ל 2α (היקפיות על אותה קשת במעגל הירוק) אבל רק אחת מהן מרכזית.

כאן רואים גם שהטענה הבאה **לא**

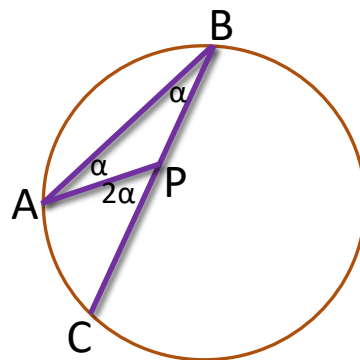
נכונה

אם זווית שקודקודה בתוך המעגל שווה לקשת שעלייה היא נשענת אז הזווית היא זווית מרכזית וקודקודה מרכז המעגל.
הטענה לא נכונה

טענה: אם אחת משתי זוויות

שנשענות על אותה קשת היקפית והיא שווה למחצית מזווית השנייה אז הזווית השנייה היא מרכזית.

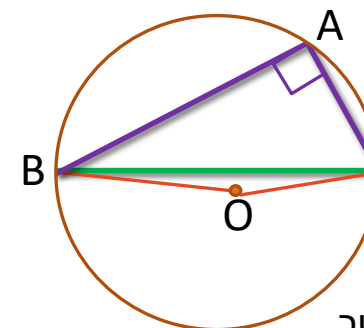
הטענה זו לא נכונה



למרות ש $\angle APC = 2\angle ABC$ נקודה P היא לא מרכז המעגל. הטענה תהיה נכונה אם ידוע ש BC קוטר.

משפט: אם זווית

היקפית שנשענת על המיתר שווה ל 90° אז המיתר הוא קוטר



נתון: מעגל O

$\angle BAC = 90^\circ$ היקפית
צ.ל. BC קוטר

הוכחה:

נניח בשלילה ש BC לא קוטר.

אם כך אז מרכז המעגל O לא נמצא על BC.

נעביר רדיוסים OB ו OC.

$\angle BOC$ מרכזית

על פי המשפט על זווית היקפית

$\angle BOC = \angle BC = 2\angle BAC = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$

אם כך $\angle BOC$ שטוחה. על פי ההגדרה

של זווית שטוחה הנקודות B, O, C נמצאות על

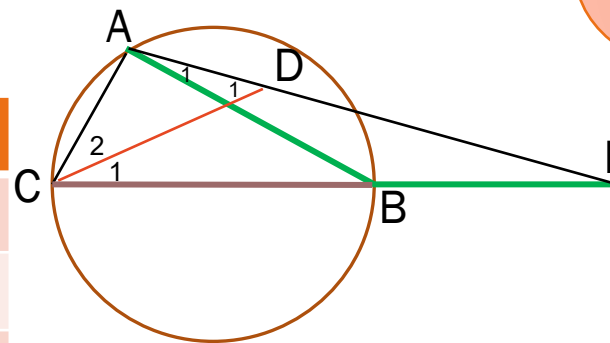
ישר אחד בניגוד להנחה.

לכן ההנחה לא נכונה ו BC קוטר.



המעגל תרגיל לדוגמא

בני גורן
עמ' 183,
ת. 33



נתון: מעגל O
CB קוטר
 $\angle C_1 = \angle C_2$
BE=AB

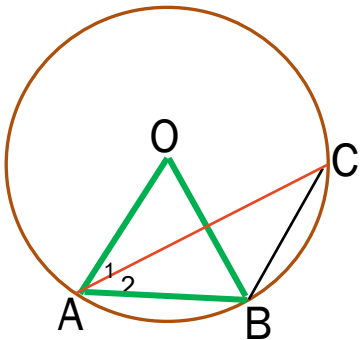
צ.ל.א. $\angle C_1 + \angle A_1 = 45^\circ$
ב. $\angle D_1 = 45^\circ$

נימוק	טענה	
זווית היקפית נשענת על הקוטר	$\angle CAB = 90^\circ$	1
	נסמן $\angle A_1 = \alpha$	2
במשולש (ABE) מול צלעות שוות זוויות שוות, נתון	$\angle E = \angle A_1 = \alpha$	3
זווית חיצונית ל $\triangle ABE$	$\angle ABC = 2\alpha$	4
סכום זוויות במשולש (ABC), 1,	$\angle C_1 + \angle C_2 + \angle ABC = 90^\circ$	5
נתון (4,5, $\angle C_1 = \angle C_2$)	$2\angle C_1 + 2\alpha = 90^\circ$	6
6,2	$\angle C_1 + \alpha = 45^\circ \rightarrow \angle C_1 + \angle A_1 = 45^\circ$	7
זווית חיצונית ל $\triangle CDE$	$\angle D_1 = \angle C_1 + \angle E$	8
8,3,7	$\angle D_1 = \angle C_1 + \angle E = \angle C_1 + \alpha = 45^\circ$	9
	מ.ש.ל	



המעגל תרגיל לדוגמא

בני גורן
עמ' 176,
ת. 5

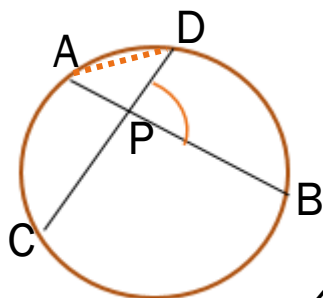


נתון: מעגל O
 $AB=BO=AO$
 $\angle A_1 = \angle A_2$
צ.ל. א. $\angle C, \angle A_2, \angle ABC$
ב. $AO \parallel BC$

נימוק	טענה	
נתון, במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות, סכום זוויות במשולש (אפשר במקום זה $\triangle AOB$ שווה צלעות)	$\angle OAB = \angle OBA = \angle AOB = 60^\circ$	1
זווית היקפית שווה למחצית של זווית מרכזית שנשענת על אותה קשת, 1	$\angle C = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ$	2
נתון AC חוצה זווית, 1	$\angle A_2 = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ$	3
סכום זוויות במשולש $(\triangle ABC)$, 2,3	$\angle ABC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 150^\circ$	4
כמו 3	$\angle A_1 = 30^\circ$	5
5,2	$\angle A_1 = \angle C$	6
אם זוויות מתחלפות שוות אז ישרים מקבילים, 6	$AO \parallel BC$	7
	מ.ש.ל	

המעגל

זוויות פנימיות במעגל

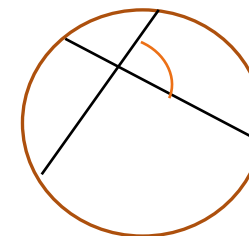


נתון: מעגל O
 CD, AB מיתרים
 $P = AB \cap CD$
 צ.ל.

$$\angle DPB = \frac{1}{2} (\widehat{BD} + \widehat{AC})$$



הגדרה: זווית פנימית
 הוא זווית שקודקודה
 בתוך המעגל והצלעות הן
 חלקי המיתרים



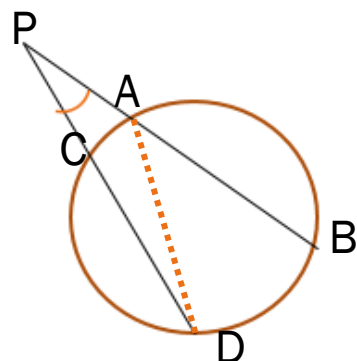
הגדרה (נוספת):
 זווית פנימית היא
 זווית בין שני
 מיתרים שנחתכים
 בתוך המעגל

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיתר AD	1
זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת	$\angle DAB = \frac{1}{2} \widehat{DB}$	2
כמו 2	$\angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$	3
זווית חיצונית למשולש (ΔAPD)	$\angle DPB = \angle DAP + \angle ADP$ $= \angle DAB + \angle ADC$	4
2-4	$\angle DPB = \frac{1}{2} \widehat{DB} + \frac{1}{2} \widehat{AC}$	5
	מ.ש.ל	

משפט: זווית פנימית שווה
 למחצית הסכום של הקשתות
 שבין המיתרים שיוצרים אותה

המעגל

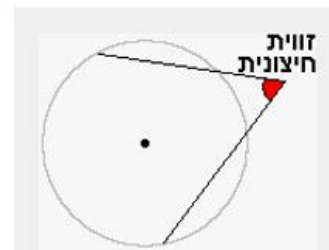
זוויות חיצונית למעגל



נתון: מעגל O
 CD, AB מיתרים
 $P = AB \cap CD$
 צ.ל.

$$\angle DPB = \frac{1}{2} (\widehat{BD} - \widehat{AC})$$

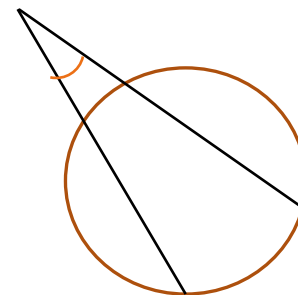
ש"ב בני גורן, עמ' 176, ת. 6, 7, עמ'
 177, ת. 11, 12, עמ' 178, ת. 13,
 179, ת. 19, עמ' 180, ת. 20, עמ'
 181, ת. 25, 26, עמ' 182, ת. 29,
 עמ' 183, ת. 32, 33



הגדרה: זווית חיצונית
 היזונית שקודקודה מחוץ
 למעגל והצלעות הן חלקי
 החותכים של המעגל

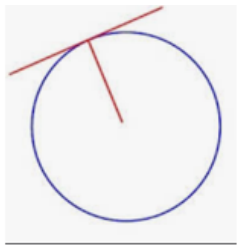
הגדרה (נוספת):

זווית חיצונית היא
 זווית בין המשכי
 שני מיתרים
 שנחתכים מחוץ
 למעגל



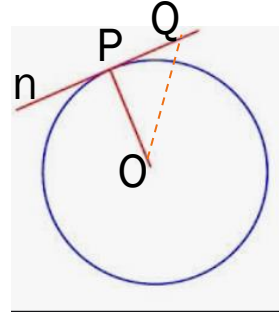
משפט: זווית חיצונית שווה
 למחצית ההפרש בין הקשתות
 שבין המיתרים שיוצרים אותה

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיתר AD	1
זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת	$\angle DAB = \frac{1}{2} \widehat{DB}$	2
כמו 2	$\angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$	3
זווית חיצונית למשולש (APD)	$\angle DAB = \angle DPA + \angle PDA$ $\angle DPA = \angle DAB - \angle PDA$	4
2-4	$\angle DPB = \frac{1}{2} \widehat{DB} - \frac{1}{2} \widehat{AC}$	5
	מ.ש.ל	



הגדרה: משיק הוא ישר
שיש לו עם המעגל נקודה
אחת משותפת בלבד.
לנקודה זו קוראים **נקודת**
ההשקה

המעגל המשיק



נתון: מעגל O
n משיק למעגל
 $P = n \cap O$
צ.ל. $OP \perp n$

הוכחה:

נניח בשלילה שרדיוס לא מאונך למשיק בנקודת
השקה.

אם כך נוריד מנקודה O אנך לישר n ($Q \in n$) $OQ \perp n$.
ב $\triangle OQP$ מתקיים: $OP > OQ$ כי OP נמצאת מול זווית
הישרה

(על פי הנחה $\angle Q = 90^\circ$).

הנקודה Q נמצאת מחוץ למעגל על פי הגדרת המשיק
(הנקודה P הנקודה המשותפת היחידה למשיק
ומעגל)

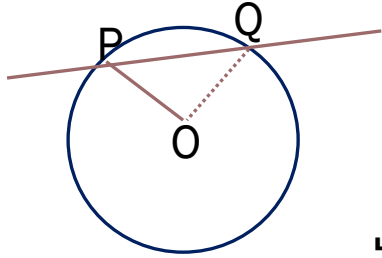
לכן OQ גדול מרדיוס המעגל ($OQ > R$) . אבל $OP = R$.
סתירה! כי התקבל $R > OQ > R$.
לכן הנחה לא נכונה ו $OP \perp n$.

משפטים:

1. רדיוס מאונך למשיק
בנקודת ההשקה
2. אם מנקודה מחוץ למעגל
מעבירים עליו שני משיקים
אז מתקיים:
א. הקטעים של המשיקים בין
הנקודה המשותפת לנקודות
השקה שווים זה לזה
ב. הישר שעובר דרך הנקודה
המשותפת ומרכז המעגל חוצה
זווית בין המשיקים
ג. הישר שעובר דרך הנקודה
המשותפת ומרכז המעגל חוצה
זווית בין רדיוסים שמעבירים
לנקודות השקה
ד. הישר שעובר דרך הנקודה
המשותפת ומרכז המעגל חוצה
את המיתר שמחבר נקודות
ההשקה

משפט הפוך: אם למעגל וישר יש

נקודה משותפת ורדיוס מאונך לישר
בנקודה זו אז הישר הוא משיק למעגל



נתון: מעגל O
n ישר
 $P = n \cap O$
 $OP \perp n$

צ.ל. n משיק למעגל

הוכחה: על פי הגדרת המשיק, כדי להוכיח ש n
משיק למעגל צריך להוכיח ש P היא הנקודה
המשותפת היחידה לישר ולמעגל.

נניח בשלילה שקיימת נקודה משותפת נוספת Q.
נעביר רדיוס OQ.

$OQ = OP$ כי רדיוסים של אותו מעגל. לכן
 $\angle Q = \angle P$ (במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות
($\triangle OPQ$)).

$\angle P = 90^\circ$ על פי הנתון. לכן גם $\angle Q = 90^\circ$.

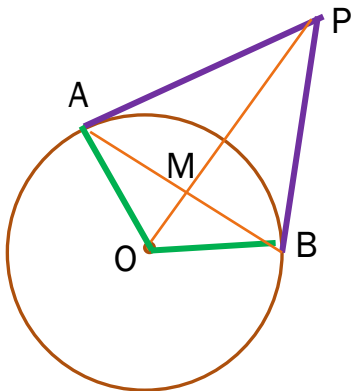
סתירה! כי בלתי אפשרי שבאותו משולש יש שתי זוויות
ישרות.

לכן הנחה לא נכונה, לישרים אין נקודות נוספות
משותפות ו הישר n משיק למעגל על פי הגדרה.

נימוק	טענה	
	נחפוף $\triangle OBP$ ו $\triangle OAP$	1
רדיוס מאונך למשיק בנקודת השקה	$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$	
רדיוסים של אותו מעגל	$OA = OB$	
צלע משותפת	$OP = OP$	
צ.צ.ז. מול הצלע הגדולה (90°)	$\triangle OBP \cong \triangle OAP$	
צ.מ.ב.ח.	$PB = AP$	2
ז.מ.ב.ח. ($OB = OA$)	$\angle APO = \angle BPO$	3
ז.מ.ב.ח. ($BP = AP$)	$\angle AOP = \angle BOP$	4
נתון, 2	$APBO$ דלתון	5
אלכסון הראשי של דלתון מאונך לאלכסון המישני וחוצה אותו	$OP \perp AB$ $MB = AM$	6
	מ.ש.ל.	

המעגל

המשיק



נתון: מעגל O
 BP, AP משיקים למעגל
 $A = AP \cap O$
 $B = BP \cap O$

צ.ל.:
 א. $PB = PA$
 ב. $\angle APO = \angle BPO$
 ג. $\angle AOP = \angle BOP$
 ד. $OP \perp AB$
 אם $M = OP \cap AB$
 אז $MB = AM$

משפט:

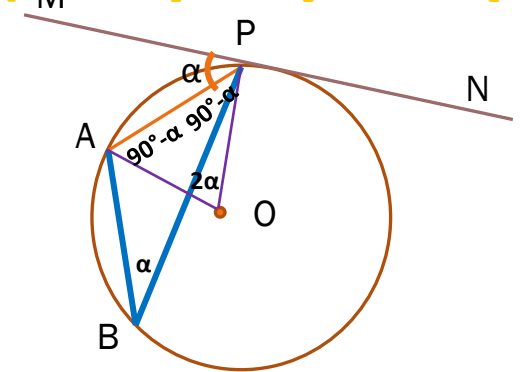
- אם מנקודה מחץ למעגל מעבירים עליו שני משיקים אז מתקיים:
- א. הקטעים של המשיקים בין הנקודה המשותפת לנקודות השקה שווים זה לזה
- ב. הישר שעובר דרך הנקודה המשותפת ומרכז המעגל חוצה זווית בין המשיקים
- ג. הישר שעובר דרך הנקודה המשותפת ומרכז המעגל חוצה זווית בין רדיוסים שמעבירים לנקודות השקה
- ד. הישר שעובר דרך הנקודה המשותפת ומרכז המעגל חוצה את המיתר שמחבר נקודות ההשקה ומאונך לו.

המעגל

המשיק

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר רדיוסים OA, OP	1
	נסמן $\angle MPA = \alpha$	2
רדיוסים של אותו מעגל	$OA = OP$	3
רדיוס מאונך למשיק בנקודת השקה	$\angle OPM = 90^\circ$	4
2,4	$\angle OPM = 90^\circ - \alpha$	5
במשולש מול צלעות שוות זוויות שוות ($\triangle AOP$), 3,5	$\angle OAP = 90^\circ - \alpha$	6
סכום זוויות במשולש ($\triangle AOP$), 5,6	$\angle AOP = 2\alpha$	7
זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת	$\angle ABP = \frac{1}{2} \widehat{AP} - \frac{1}{2} \angle AOP = \frac{1}{2} \times 2\alpha = \alpha$	8
8, 2	$\angle ABP = \angle MPA$	9
	מ.ש.ל	

משפט: זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית שנשענת על אותה קשת (שווה למחצית הקשת שבין משיק למיתר).

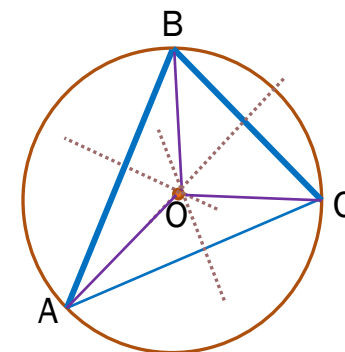


נתון: מעגל O
 MN משיק, AP מיתר
 $P = MN \cap O$
 $\angle ABP$ היקפית
 צ.ל. $\angle MPA = \angle ABP$

מצולע חסום

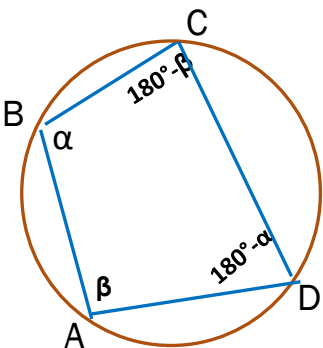
הגדרה: מצולע חסום במעגל הוא מצולע שכל הקודקודים שלו נמצאים על המעגל

משפט: סביב כל משולש אפשר לחסום מעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של אנכים האמצעים לצעות המשולש



- הוכחה:** נשתמש בשתי טענות:
1. שלושה אנכים אמצעים של המשולש נפגשים בנקודה אחת
 2. אנך אמצעי לקטע הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מקצות הקטע
 3. לכן אם m, n, k אנכים אמצעים לצלעות המשולש ABC $O = m \cap n \cap k$ אזי $OC = OB = OA$
 4. לכן נקודה O נמצאת במרחקים שווים מנקודות A, B, C , זאת אומרת O מרכז המעגל העובר דרך נקודות האלה.
 6. על פי הגדרה המשולש חסום במעגל (המעגל חוסם את המשולש).

משפט: סכום של זוויות נגדיות במרובע חסום שווה ל 180°



נתון: מעגל O
 ABCD מרובע חסום
 צ.ל. $\angle C + \angle A = 180^\circ$
 $\angle B + \angle D = 180^\circ$

הוכחה:

זווית היקפית במעגל שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle BAD = \frac{1}{2} \widehat{BCD} \quad 1. \\ \angle BCD = \frac{1}{2} \widehat{BAD} \quad 2. \end{array} \right.$$

$$\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2} \widehat{BCD} + \frac{1}{2} \widehat{BAD}$$

$$\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2} (\widehat{BCD} + \widehat{BAD})$$

$$\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ$$

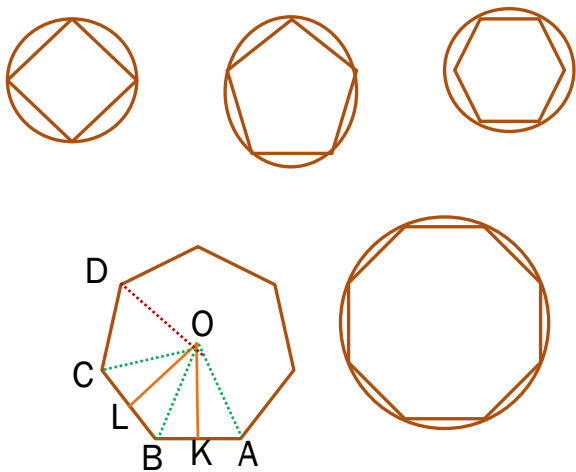
באותו אופן

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

מ.ש.ל.

נימוק	טענה	
אנך אמצעי הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מקצוות הקטע	$OA=OB=OC$	1
סכום זוויות במצולע משוכלל, כל הזוויות שוות	$\angle A = \angle B = \angle C = \dots = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$	2
רדיוסים של אותו מעגל שווים, במצולע משוכלל כל הצלעות שוות, צ.צ.צ.	$\triangle AOB \cong \triangle BOC$	3
ז.מ.ב.ח.®	$\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB$	4
4	$\angle OBA = \angle OBC = \frac{1}{2} \angle B$	5
$\angle B = \angle C, 5$	$\angle OCB = \frac{1}{2} \angle C$	6
צ.ז.צ. (5,6, CB=CD, R)	$\triangle OCB \cong \triangle ODC$	7
צ.מ.ב.ח.	$OC=OD$	8
ז.מ.ב.ח. (OB=OA)	באותו אופן גם שאר הקודקודים נמצאים באותו מרחק מ O לכן כל הקודקודים נמצאים על המעגל.	9
	מ.ש.ל.	

מצולע חסום



נתון: מצולע משוכלל ABCD...
צ.ל.: קיים מעגל O כך ש
 $OA=OB=OC=OD=...$

הוכחה:

נסמן K – אמצע AB, L – אמצע CB
נעלה אנכים אמצעים:
OK⊥AB, OL⊥CB
נוכיח $OA=OB=OC=OD=...$

מצולע משוכלל חסום

הגדרה: מצולע חסום במעגל הוא מצולע שכל הקודקודים שלו נמצאים על המעגל

משפט: סביב כל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של אנכים האמצעים לצעות המצולע

נשים לב שבשביל למצוא מרכז המעגל החוסם את המצולע המשוכלל מספיק למצוא נקודת החיתוך של שני אנכים אמצעים

מרחב חסום

משפט: מרחב הוא בר חסימה אם ורק אם יש לו זוג זוויות נגדיות שסכומן 180°

הוכחה:

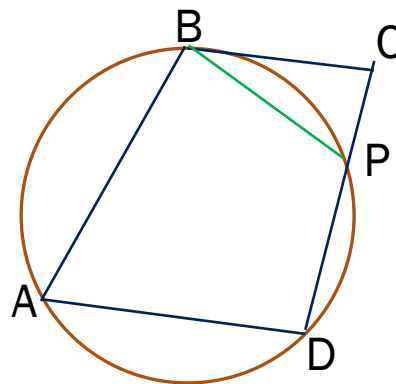
כיוון אחד הוכחנו קודם: במרחב חסום סכום זוויות נגדיות שווה ל 180° .

כיוון שני: נוכיח שאם במרחב יש שתי זוויות נגדיות שסכומן 180° אז קיים מעגל שעובר דרך כול הקודקודים של המרחב.

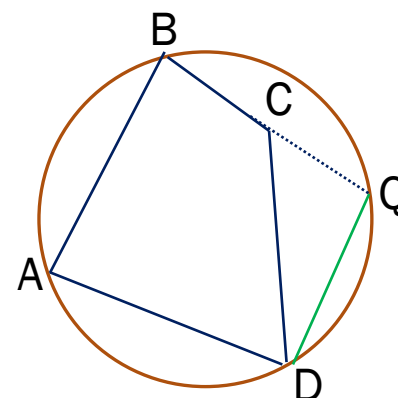
כמו שהוכחנו קודם דרך שלוש נקודות תמיד עובר מעגל.

נניח בשלילה שמעגל זה לא עובר דרך קודקוד הרביעי.

משפטים הפוכים



הקודקוד הרביעי מחוץ למעגל



הקודקוד הרביעי בתוך המעגל

1. נעביר מיתר BP (P נקודת החיתוך של DC עם המעגל)
2. $\angle A + \angle BPD = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרחב חסום)
3. $\angle A + \angle C = 180^\circ$ (נתון)
4. $\angle BPD = \angle C$ על פי 2,3
5. $\angle BPD > \angle C$ (זווית חיצונית ל $\triangle BPC$)
6. סתירה בין 4 ו 5. לכן הנקודה C לא נמצאת מחוץ למעגל.
1. נמשיך את BC עד לחיתוך עם המעגל (נקודה Q), נעביר מיתר DQ
2. $\angle A + \angle BQD = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרחב חסום)
3. $\angle A + \angle BCD = 180^\circ$ (נתון)
4. $\angle BQD = \angle BCD$ על פי 2,3
5. $\angle BCD > \angle BQD$ (זווית חיצונית ל $\triangle CQD$)
6. סתירה בין 4 ו 5. לכן הנקודה C לא נמצאת בתוך המעגל.
7. אין אפשרויות אחרות למיקום של נקודה C. לכן היא נמצאת על המעגל

מצולע חסום

הוכחה:

כמו שהוכחנו קודם דרך שלוש נקודות B,M,A עובר מעגל

1. נניח בשלילה שנקודה N לא נמצאת על מעגל זה.

2. קיימות שתי אפשרויות: הנקודה N נמצאת בתוך המעגל או נקודה N נמצאת מחוץ למעגל. נניח בלי הגבלת הכליות ש N נמצאת בתוך המעגל.

3. נמשיך את AN עד לחיתוך עם המעגל (נקודה P) ונעביר מיתר PB.

4. $\angle APB$ היקפית, נשענת על הקשת $\widehat{AB}$.

5. $\angle AMB$ היקפית, נשענת על הקשת $\widehat{AB}$.

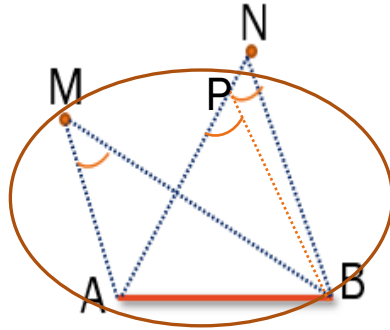
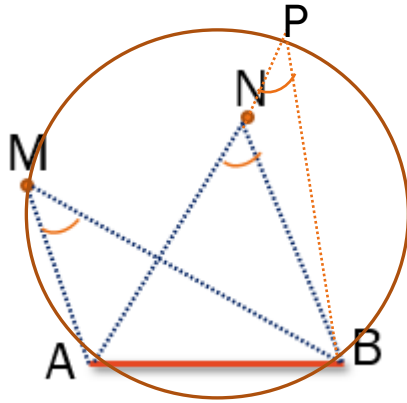
6. $\angle AMB = \angle APB$ כי זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת שוות זו לזו

7. $\angle AMB = \angle ANB$ על פי הנתון

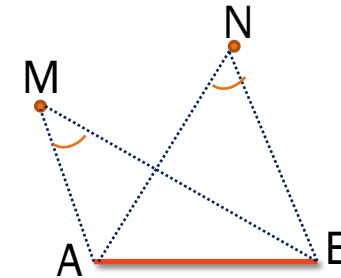
8. $\angle APB = \angle ANB$ על פי 7,8

9. סתירה! כי זווית חיצונית גדולה מזווית פנימית של המשולש ($\triangle BPN$).

10. לכן הנחה לא נכונה ונקודה N נמצאת על המעגל.



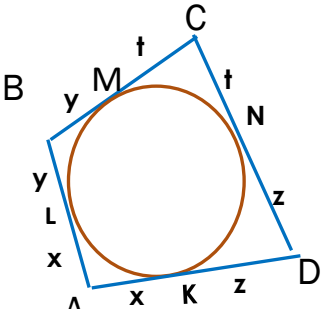
משפט: אם שתי נקודות נמצאות מצד אחד של קטע נתון ומשתי הנקודות האלה רואים את הקטע באותה זווית אז הנקודות וקצוות הקטע נמצאות על אותו מעגל (אותה קשת של המעגל).



נתון: קטע AB
N,M נקודות מצד אחד של הקטע
 $\angle AMB = \angle ANB$
צ.ל. קיים מעגל O
 $M, B, A, N \in O$

מצולע חוסם

משפט: סכום של שתי צלעות נגדיות במרובע חוסם שווה ל סכום של שתי הצלעות הנגדיות האחרות שלו



נתון: מעגל O
ABCD מרובע חוסם
נק' השקה L, K, N, M
צ.ל.: $AD+BC=CD+AB$

הוכחה:

אם מנקודה מחוץ למעגל מעבירים עליו שני משיקים אז הקטעים שמחברים את הנקודה עם נקודות השקה שווים זה לזה

$$\left. \begin{array}{l} AK=AL=x \\ BL=BM=y \\ CM=CN=t \\ DN=DK=z \end{array} \right\}$$

$$AB+CD=x+y+t+z$$

$$BC+AD=y+t+z+x$$

לכן

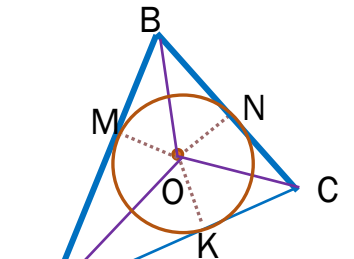
$$AB+CD=BC+AD$$

מ.ש.ל.

- הוכחה:** נשתמש בשתי טענות:
1. שלושה חוצי זוויות של המשולש נפגשים בנקודה אחת
 2. חוצה זווית הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים צלעות הזווית
 3. לכן אם CO, BO, AO חוצי זוויות של המשולש $O=A0 \cap BO \cap CO \mid ABC$
 4. $OM=ON=OK$ הם מרחקים MO, NO, KO (מנקודה O לצלעות המשולש)
 5. לכן נקודה O נמצאת במרחקים שווים מנקודות M, N, K , זאת אומרת O מרכז המעגל העובר דרך נקודות האלה.
 6. למעגל ולכל אחת מהצלעות יש נקודה משותפת, רדיוסים OK, ON, OM מאונכים לצלעות המשולש בנקודה זו (מרחקים) לכן על פי משפט הפוך למשפט על רדיוס ומשיק צלעות המשולש הם מיקים למעגל.
 7. $\triangle ABC$ חוסם את המעגל על פי ההגדרה.

הגדרה: מצולע חוסם את המעגל הוא מצולע שכל הצלעות שלו הם משיקים למעגל

משפט: בתוך כל משולש אפשר לחסום מעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של חוצי זוויתת המשולש



נשים לב, ששלישיות הנקודות N, O, A , K, O, B , M, O, C לא נמצאות על ישר אחד

מרובע חוסם

משפט: אפשר לחסום מעגל בתוך מרובע אם ורק אם סכום של שתי הצלעות הנגדיות שלו שווה לסכום של שתי הצלעות האחרות.

הוכחה:

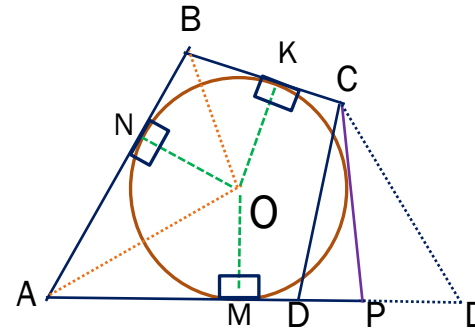
כיוון אחד הוכחנו קודם: אם מרובע חוסם את המעגל אז סכום הצלעות הנגדיות שלו שווה לסכום של שתי הצלעות האחרות.

כיוון שני: נוכיח שאם במרובע סכום של שתי צלעות נגדיות שווה לסכום של שתי צלעות אחרות אז בוודאות אפשר לחסום בתוכו מעגל.

כמו שהוכחנו קודם דרך שלוש נקודות תמיד עובר מעגל.

נניח בשלילה שהטענה לא מתקיימת כלומר $AB+CD \neq AD+BC$ אבל לא קיים מעגל שכל הצלעות של המרובע משיקות לו.

משפטים הפוכים

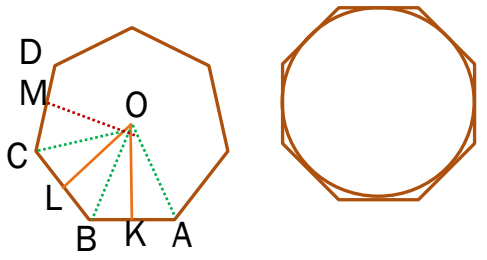
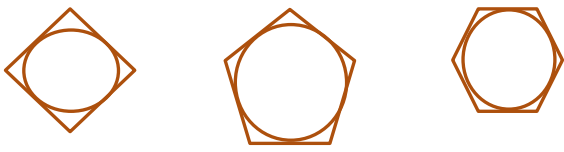


1. נעבר חוצי זוויות A ו- B . הם נפגשים בנקודה O שנמצאת במרחקים שווים מקטעים AB ו- AD , כי חוצה זווית הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מצלעות הזווית.
2. נוריד: $OM \perp AD, ON \perp AB, OK \perp BC$ (מרחקים)
3. $OK=ON=OM$ על פי 1 ו-2.
4. נקודה O נמצאת במרחקים שווים מנקודות K, N, M לכן קיים מעגל עם מרכז בנקודה O שעובר דרך נקודות האלה.
5. AB, BC, AD משיקים למעגל זה כי לכל אחד מהם יש נקודה משותפת עם המעגל ורדיוסים מאונכים להם בנקודות האלה.
6. על פי ההנחה CD לא משיק למעגל זה. CD נמצא מחוץ למעגל או חותך אותו כמו שמתואר על השרטוטים.
7. נניח בלי הקבלת הכליות ש CD חותך את המעגל.
8. נעביר דרך נקודה C משיק למעגל. נסמן $P=CP \cap AD$ (משיק)

8. המרובע חוסם את $ABCP$ המעגל לכן
- $AB+CP=BC+AP=BC+AD+DP$
9. על פי הנתון
- $AB+CD=BC+AD$
10. על פי 8 ו-9
- ~~$AB+CP=AB+CD+DP$~~
- $CP=CD+DP$
11. על פי אי שוויון המשולש
- $CP < CD+DP$
12. סתירה! לכן בלתי אפשרי ש CP מחוץ למעגל. באותו אופן CD גם לא חותך המעגל. לכן CD משיק.

נימוק	טענה	
חוצה זווית הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מצלעות הזווית	$OK=OL$	1
במצולע משוכלל כל הזוויות שוות, נתונים חוצי זוויות	$\angle OAK = \angle OBK = \angle OBL$	2
2, נתון, 1, ז.ז.צ.	$\triangle OKA \cong \triangle OKB \cong \triangle OLB$	3
צ.מ.ב.ח. במצולע משוכלל כל הצלעות שוות	$KA=KB=BL=\frac{1}{2}CB$	4
	$CL=CB-BL=CB-\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}CB$	5
ז.ז.צ. (נתון, 4, 5, $CL=LB, OL$)	$\triangle OLC \cong \triangle OLB$	6
צ.מ.ב.ח., כל הזוויות במצולה משוכלל שוות זו לזו	$\angle OCL = \angle OBL = \frac{1}{2}\angle C$	7
7, כמו 1	$\angle OCM = \angle C - \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle C$ לכן CO חוצה זווית C ו $OL=OM$	8
	לכן גם נקודה M נמצאת על המעגל שמרכזו O ורדיוס $OM=OL=OK$	8
	CD, BC, AB משיקים למעגל זה כי לכול אחד מהם יש נקודה משותפת עם המעגל ורדיוסים מאונכים להם בנקודות אלה. וכך גם עם שאר הצלעות..	9
	מ.ש.ל.	

מצולע חוסם



נתון: מצולע משוכלל $ABCD\dots$
 צ.ל.: קיים מעגל O כך ש
 $AB, BC, CD, \dots$ משיקים למעגל

הוכחה:
 נעביר חוצי זוויות OB, OA
 נוריד
 $OL \perp BC, OK \perp AB, OM \perp CD$
 נוכיח ש $OM=OK=OL$

מצולע משוכלל חוסם

הגדרה: מצולע חוסם את המעגל הוא מצולע שכל הצלעות שלו הם משיקים למעגל

משפט: בתוך כל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של חוצי זווית המצולע

נשים לב שבשביל למצוא מרכז המעגל החסום במצולע משוכלל מספיק למצוא נקודת החיתוך של שני חוצי זוויות

שני מעגלים

מעגלים משיקים



מעגלים משיקים מבחוץ מעגלים משיקים מבפנים

משפט: אם שני מעגלים משיקים מבפנים

או מבחוץ אז מרכזים המעגלים ונקודת

ההשקה נמצאים על ישר אחד

מעגלים משיקים מבחוץ

נניח בשלילה שנקודות M, P, O לא על ישר אחד.

נעביר רדיוסים MP ו- OP וקטע OM.

נוצר משולש OPM שבו על פי אי שוויון המשולש

$OP + PM > OM$. לכן $R + r > OM$

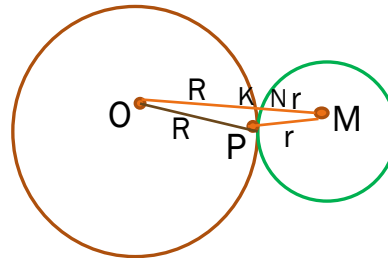
נסמן נקודת החיתוך עם המעגלים N, K.

$OM = OK + KN + NM = R + KN + r$

התקבל: $R + r > R + KN + r$. סתירה! לכן ההנחה לא

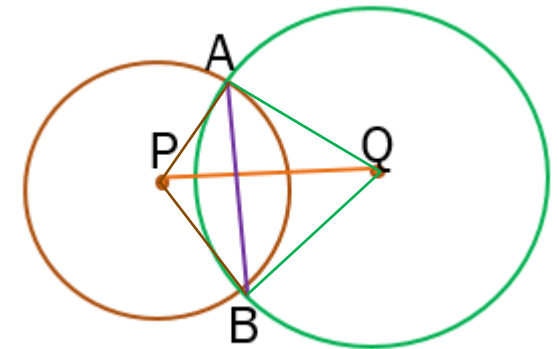
נכונה ונקודות נמצאות על ישר אחד.

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר רדיוסים PB, PA, OB, OA	1
רדיוסים של אותו מעגל שווים זה לזה	$BP = AP, BO = AO$	2
2	AOBP דלתון	3
אלכסון הראשי של דלתון מאונך לאלכסון המשני וחוצה אותו	PO אנך אמצעי ל AB	4
	מ.ש.ל	



מעגלים נחתכים

משפט: קטע מרכזים של שני מעגלים נחתכים מאונך למיתר המשותף שלהם וחוצה אותו.



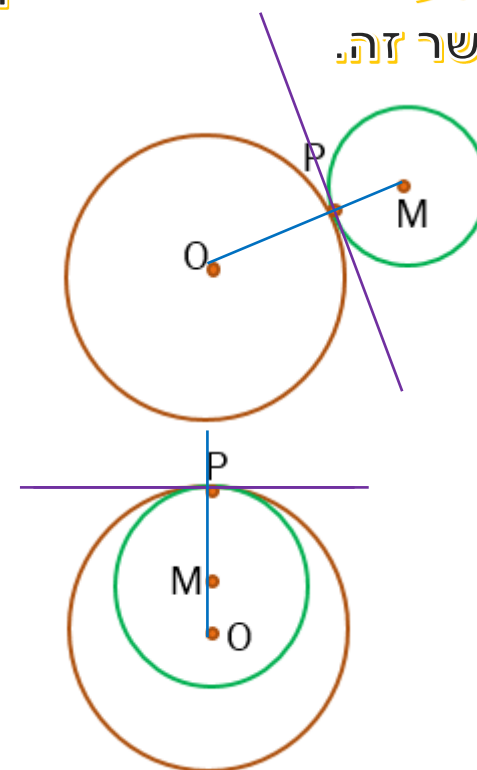
נתון: מעגל O, מעגל P

$B = P \cap O, A = P \cap O$

צ.ל. PO אנך אמצעי ל AB

מעגלים משיקים

משפט: אם שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים או מבחוץ אז יש להם משיק משותף שעובר דרך נקודת השקה שלהם וקטע מרכזים מאונך לישור זה.



שני מעגלים

גיאומטריה

מכינה 2025
יחידה שמינית
(שיעורים 22-23-24)

© כל הזכויות שמורות לגלי קלר

שטחים

שטח הוא **גודל** של תחום **מישורי** בהשוואה ליחידת מידה קבועה.

שטח נמדד ב**יחידות מידה** של **אורך** בריבוע.

השטח של צורות בסיסיות כמו משולש ועיגול ידוע באמצעות נוסחאות. צורות מורכבות יותר ניתן לפעמים לחלק לצורות בסיסיות בעלות שטח ידוע. שטח כללי ניתן לחשב באמצעות אינטגרל, או באמצעות קירובים (גם בעזרת מחשב) בשיטות שונות.

מטר רבוע (בראשי תיבות: **מ"ר**) הוא יחידת מידה לשטח בשיטה המטרית, והיא שווה לשטחו של ריבוע שאורך צלעו מטר אחד.

יחידות מידה נוספות לשטח, הנגזרות מיחידה זו באמצעות התחליות במערכת היחידות הבינלאומית הן:

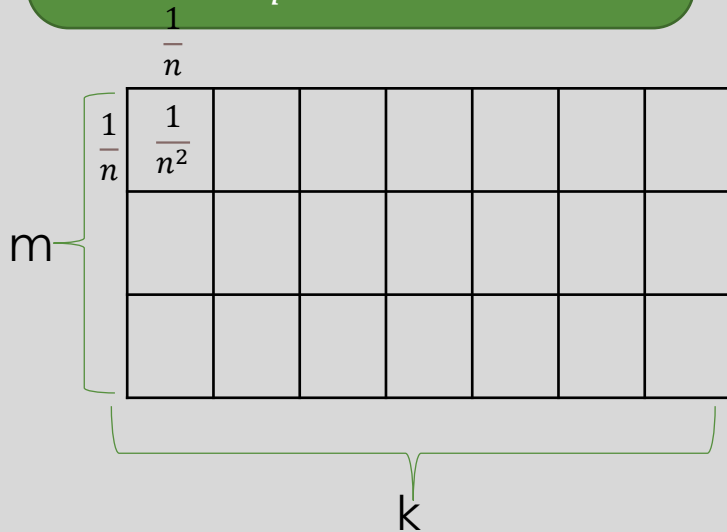
הכפלה	שם	סימול	הכפלה	שם	סימול
10^0	מטר רבוע (סנטיאר)	m^2	10^0	מטר רבוע (סנטיאר)	m^2
10^2	דקמטר רבוע (are)	dam^2	10^2	דקמטר רבוע (are)	dam^2
10^4	הקטומטר רבוע (הקטאר)	hm^2	10^4	הקטומטר רבוע (הקטאר)	hm^2
10^6	קילומטר רבוע (אלף דונמים מטריים)	km^2	10^6	קילומטר רבוע (אלף דונמים מטריים)	km^2
10^{12}	מגה מטר רבוע	Mm^2	10^{12}	מגה מטר רבוע	Mm^2
10^{18}	גיגה מטר רבוע	Gm^2	10^{18}	גיגה מטר רבוע	Gm^2
10^{24}	טרה מטר רבוע	Tm^2	10^{24}	טרה מטר רבוע	Tm^2
10^{30}	פטה מטר רבוע	Pm^2	10^{30}	פטה מטר רבוע	Pm^2
10^0	מטר רבוע (סנטיאר)	m^2	10^0	מטר רבוע (סנטיאר)	m^2
10^{-2}	דצימטר רבוע	dm^2	10^{-2}	דצימטר רבוע	dm^2
10^{-4}	סנטימטר רבוע (סמ"ר)	cm^2	10^{-4}	סנטימטר רבוע (סמ"ר)	cm^2
10^{-6}	מילימטר רבוע	mm^2	10^{-6}	מילימטר רבוע	mm^2
10^{-12}	מיקרומטר רבוע	μm^2	10^{-12}	מיקרומטר רבוע	μm^2
10^{-18}	ננומטר רבוע	nm^2	10^{-18}	ננומטר רבוע	nm^2
10^{-24}	פיקומטר רבוע	pm^2	10^{-24}	פיקומטר רבוע	pm^2
10^{-30}	פמטומטר רבוע	fm^2	10^{-30}	פמטומטר רבוע	fm^2

- **דונם** מטרי – 1,000 מטר רבוע

שטחים

שטח הוא מספר שמתאימים לכל צורה גיאומטרית סגורה.

הוכחה:
נוכיח את הטענה עבור a ו b
רציונליים $(\frac{p}{q})$



$$a = \frac{p}{q} \quad b = \frac{r}{t}$$

$$a = \frac{m}{n} \quad b = \frac{k}{n}$$

נניח ש n הוא מכנה משותף של שני השברים. אז

המשפט הבסיסי לחישוב השטח של מלבן:

אם צלעות המלבן שוות ל a ו b יחידות אורך אז השטח שלו שווה

$$S = ab$$

• נשים לב ש a ו b נמדדו באותן יחידות אורך

המלבן מכיל $m \cdot k$ יחידות שטח ששטח של כל אחת מהן שווה ל $\frac{1}{n^2}$ לכן שטח של מלבן שווה

$$m \cdot k \cdot \frac{1}{n^2} = m \cdot \frac{1}{n} \cdot k \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{n} = a \cdot b$$

התכונות של שטח:

❖ שטח הוא מספר לא שלילי
❖ השטחים של צורות חפיפות שווים

❖ אם הצורה מחולקת לחלקים אז שטח של כל הצורה שווה לסכום של שטחים של החלקים שיוצרים אותה.

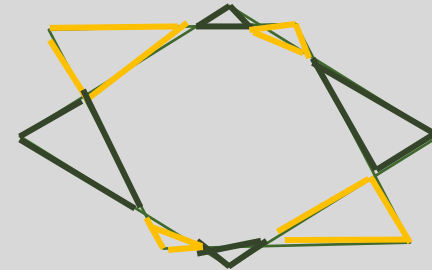
❖ יחידת השטח היא שטח של ריבוע עם אורך הצלע שווה ל 1
❖ אם צורה גיאומטרית מכילה בתוך צורה גיאומטרית אחרת אז השטח של הצורה החיצונית יותר גדול משטח הצורה הפנימית



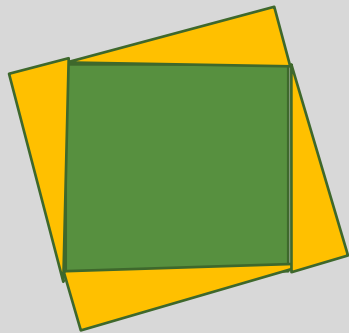
שאלות חשיבה

1. איך ישתנה שטח המלבן אם נגדיל כל צלע שלו פי K ?

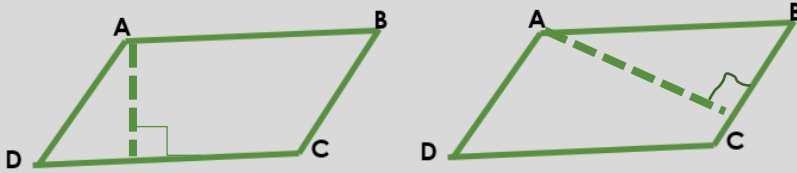
2. ידוע שני מרובעים המתוארים על השרטוט שווה שטח. הוכיחו שסכום השטחים של משולשים צהובים שווה לסכום השטחים של המשולשים השחורים.



3. הוכיחו שטח המעגל שרדיוס שלו שווה ל 1 קטן מי 4 יחידות שטח..



4. הצורה בשרטוט בנויה מריבוע ו 4 משולשים חופפים שסכום הניצבים של כל אחד מהם שווה ל d . למה שווה שטח של כל הצורה? האם אפשר לדעת שטח של הריבוע הירוק?

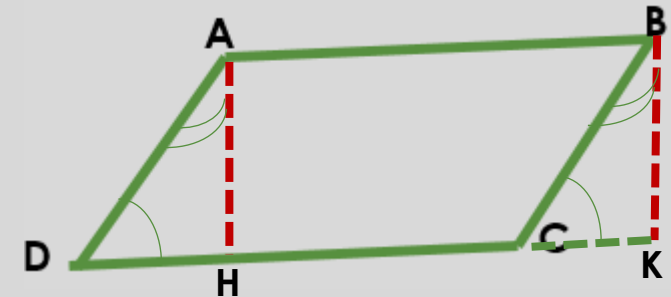


שטחים שטח של מקבילית

נימוק	טענה	
ע"פ משפט על שטח מלבן	$S_{ABKH} = HK \cdot AH$	7
2, צ.מ.ב.ח. ($\angle DAH = \angle CBK$)	$DH = CK$	8
	$DC = DH + HC$, $HK = CK + HC$	9
9,8	$DC = HK$	10
אם צורה גיאומטרית בנויה מצורות גיאומטריות	$S_{ABCD} = S_{ABCH} + S_{\triangle AHD}$	11
אחרות אז השטח שלה שווה לסכום השטחים שלהן	$S_{ABKH} = S_{ABCH} + S_{\triangle BKC}$	12
2, שטחים של צורות חפיפות שווים זה לזה	$S_{\triangle AHD} = S_{\triangle BKC}$	13
11-13	$S_{ABCD} = S_{ABKH}$	14
14,8	$S_{ABCD} = DC \cdot AH$	15
	מ.ש.ל.	

נימוק	טענה	
ב"ע	נוריד: $AH \perp DC$, $BK \perp DC$ ($H, K \in DC$)	1
	נחפוף $\triangle CBK$ ו- $\triangle DAH$	2
צלעות נגדיות במקבילית	$AD = BC$	
על פי 1	$\angle AHD = \angle BKC = 90^\circ$	
זוויות מתאימות ($BC \parallel AD$, ק"ח DC)	$\angle ADH = \angle BCK$	
סכום זוויות במשולש	$\angle DAH = \angle CBK$	
ז.צ.ז.	$\triangle CBK \cong \triangle DAH$	
צ.מ.ב.ח. ($\angle BCK = \angle ADH$)	$AH = BK$	3
אם זוויות מתאימות שוות אז ישרים מקבילים (90°)	$AH \parallel BK$	4
3,4 מרובע בעל זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות	מקבילית ABKH	5
5,1 מקבילית בעלת זווית ישרה	מלבן ABKH	6

משפט: שטח של מקבילית שווה למכפלה של אורך הצלע של המקבילית ואורך הגובה לצלע זו.



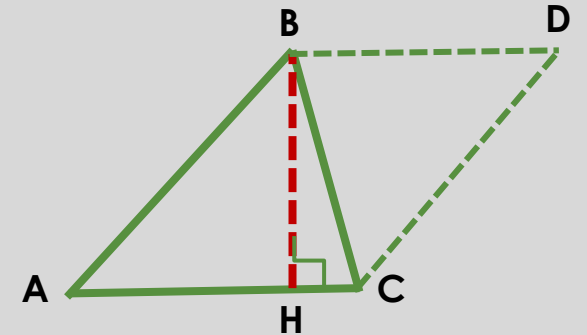
נתון: $ABCD$ מקבילית
 $AH \perp DC$, $H \in DC$
 צ.ל.: $S_{ABCD} = DC \cdot AH$

שטחים

שטח של משולש

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר דרך נקודה B ישר מקביל ל AC	1
ב"ע	נעביר דרך נקודה C ישר מקביל ל AB	2
	נסמן D נקודת החיתוך בין הישרים	3
מקבילית על פי ההגדרה, 1,2	ABDC	4
משפט: אלכסון מחלק מקבילית לשני משולשים חופים	$\triangle ABC \cong \triangle DCB$	5
שטחים של משולשים חופפים שווים זה לזה	$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCB}$	6
גובה BH שטח מקבילית,	$S_{ABDC} = AC \cdot BH$	7
	$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$	8
	מ.ש.ל.	

משפט: שטח של משולש שווה למחצית המכפלה של אורך הצלע של המשולש ואורך הגובה לצלע זו.



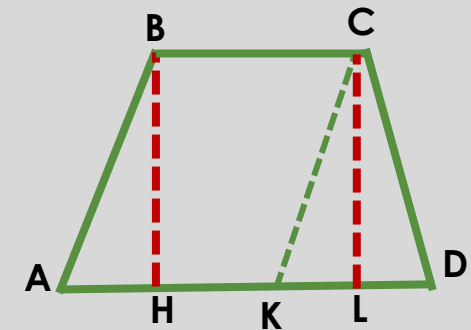
נתון: $\triangle ABC$
 $BH \perp AC, H \in AC$
 צ.ל.: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$

שטחים

שטח של טרפז

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר דרך נקודה C: $CK \parallel AB$ ($K \in AD$)	1
ABCD טרפז	$BC \parallel AK$	2
על פי ההגדרה, 1,2	ABDC מקבילית	3
ב"ע	נוריד $CL \perp AD$	4
גבהים של אותו טרפז	$BH = CL$	5
צלעות נגדיות במקבילית	$AK = BC$	6
שטח מקבילית, BH-גובה	$S_{ABCK} = AK \cdot BH$	7
שטח משולש	$S_{\Delta KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CL$	8
7,8	$S_{ABCD} = S_{ABCK} + S_{\Delta KCD} = AK \cdot BH + \frac{1}{2} KD \cdot CL =$	9
5,6	$BH \cdot (AK + \frac{1}{2} KD) = BH \cdot \frac{2AK + KD}{2} = BH \cdot \frac{BC + AK + KD}{2} = BH \cdot \frac{BC + AD}{2}$	
	מ.ש.ל.	

משפט: שטח של טרפז שווה למכפלה של אורך הגובה של טרפז ומחצית הסכום של אורכי הבסיסים שלו.



ניתון: ABCD טרפז ($AD \parallel BC$)
 $BH \perp AC$, $H \in AC$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BH$$

שטחים

נוסחאות נוספות

הוכחה:

שטח טרפז:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BH$$

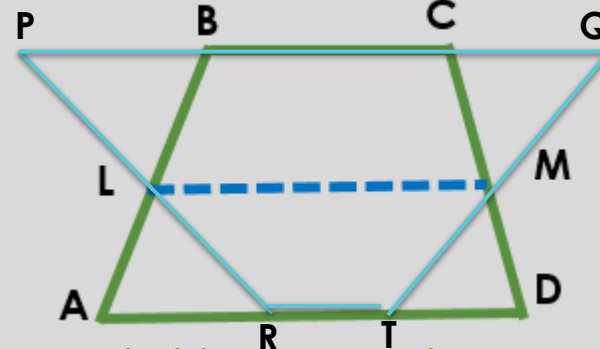
קטע אמצעים:

$$LM = \frac{1}{2} (AD + BC)$$



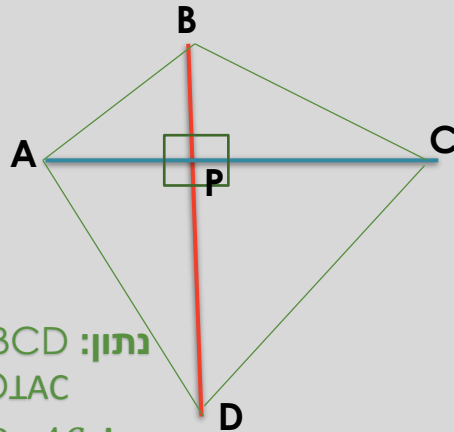
$$S_{ABCD} = LM \cdot BH$$

$$S_{ABCD} = S_{PQNR}$$



© כל הזכויות שמורות לגלי קלר

משפט: שטח של מרובע
שאלכסוניו מאונכים זה לזה
שווה למחצית המכפלה של
אלכסונים



נתון: מרובע ABCD
 $BD \perp AC$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC$$

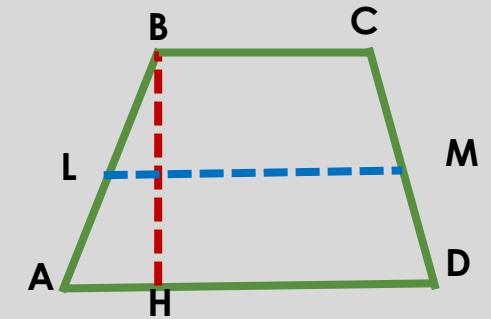
הוכחה:

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot CP \quad S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AP$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AP + \frac{1}{2} BD \cdot CP$$

$$= \frac{1}{2} (AP + PC) \cdot BD = \frac{1}{2} BD \cdot AC$$

משפט: שטח של טרפז שווה
למכפלה של קטע אמצעים
בגובה של טרפז



נתון: מרובע ABCD טרפז ($AD \parallel BC$)
 $BH \perp AC$, $H \in AC$
LM קטע אמצעים
צ.ל: $S_{ABCD} = LM \cdot BH$

משפט פיתגורס

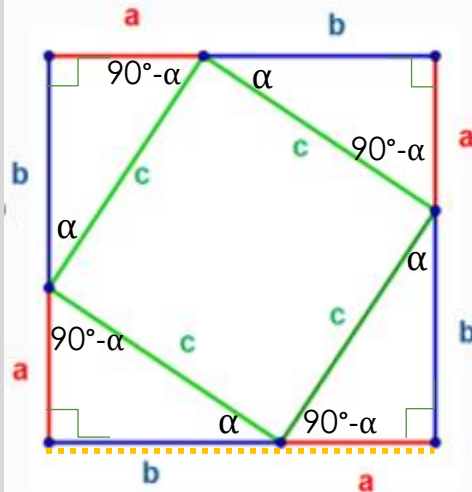
משפט: ריבוע היתר במשולש ישר זווית שווה לסכום ריבועי הניצבים

הוכחה:

נמשיך את צלע a לאורך b נעלה בקצה הקטע אנך באורך $a+b$ נוריד בקצה הקטע אנך באורך $a+b$ נעלה בקצה הקטע אנך באורך a (כמו שמתואר על השרטוט) נוצרו 4 משולשים חופפים ע"פ צלע (a) , זווית (90°) , צלע (b)

המרובע הפנימי הוא ריבוע כי כל הצלעות שלו שוות (c) , שלוש זוויות שוות ל 90° .
אם כך אז גם הזווית הרביעית שווה ל 90° . זאת אומרת שקטעים a ו b נמצאות על ישר אחד (הכתום על השרטוט) והמרובע החיצוני הוא גם ריבוע.

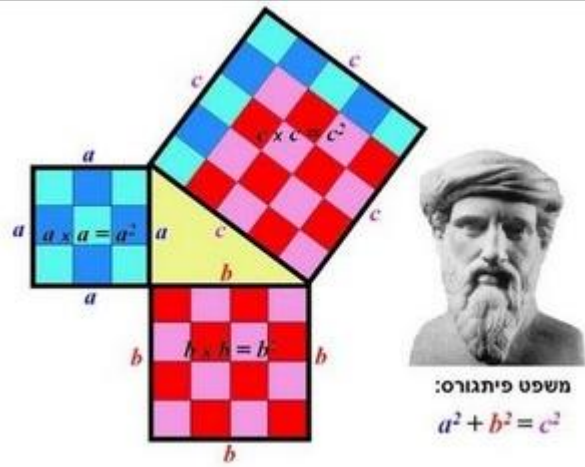
נחשב את שטח הריבוע החדש:



שטח המשולש: $\frac{a \cdot b}{2}$

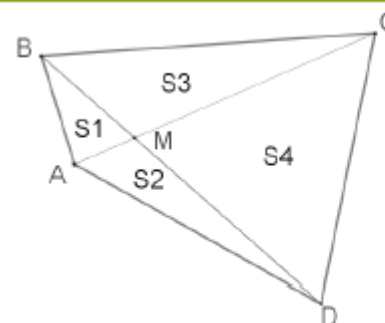
שטח הריבוע הפנימי: c^2

שטח הריבוע הגדול: $(a + b)^2$



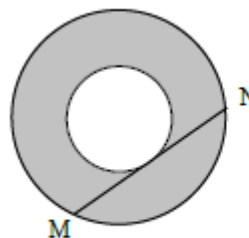


בס"ד



אלכסוני המרובע ABCD מחלקים אותו
לארבעה משולשים ששטחיהם: S_1, S_2, S_3, S_4
השטחים S_1, S_2, S_3 מהווים סדרה הנדסית.

$$\left(\frac{DM}{BM}\right)^2 = \left(\frac{CM}{AM}\right) \quad \text{הוכח כי:}$$



נתונים שני מעגלים בעלי מרכז נשותף.
המיתר MN משיק למעגל הפנימי,
שטח הטבעת שווה ל- 36π .
חשב את אורך המיתר MN .

נתונים משולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle EDF$.

$$EF = AC, ED = AB$$

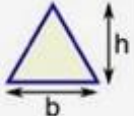
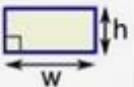
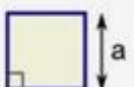
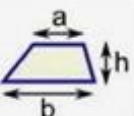
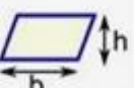
שני המשולשים הם שווי שטח. האם משולשים אלה בהכרח חופפים? נמק.

נתונים משולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle EDF$.

$$EF = AC, ED = AB$$

שני המשולשים הם שווי שטח. האם משולשים אלה בהכרח חופפים? נמק.

שטחים

שם צורה	סקיצה	שטח - S
משולש		$\frac{1}{2} \times b \times h = S$ b – אורך צלע בסיס h – גובה
מלבן		$S = w \times h$ w – רוחב המלבן h – גובה המלבן
ריבוע		$S = a^2$ a = אורך צלע הריבוע
טרפז		$S = \frac{1}{2}(a+b) \times h$ h – גובה הטרפז – המרחק בין הבסיסים a, b – בסיסי הטרפז
מקבילית		$S = b \times h$ b – בסיס h – גובה
מעגל		שטח = $S = \pi \times r^2$ היקף המעגל = $2 \times \pi \times r$ רדיוס = r
גזירה		$S = \frac{1}{2} \times r^2 \times \theta$ r – רדיוס זווית הגזירה ברדיאנים = θ

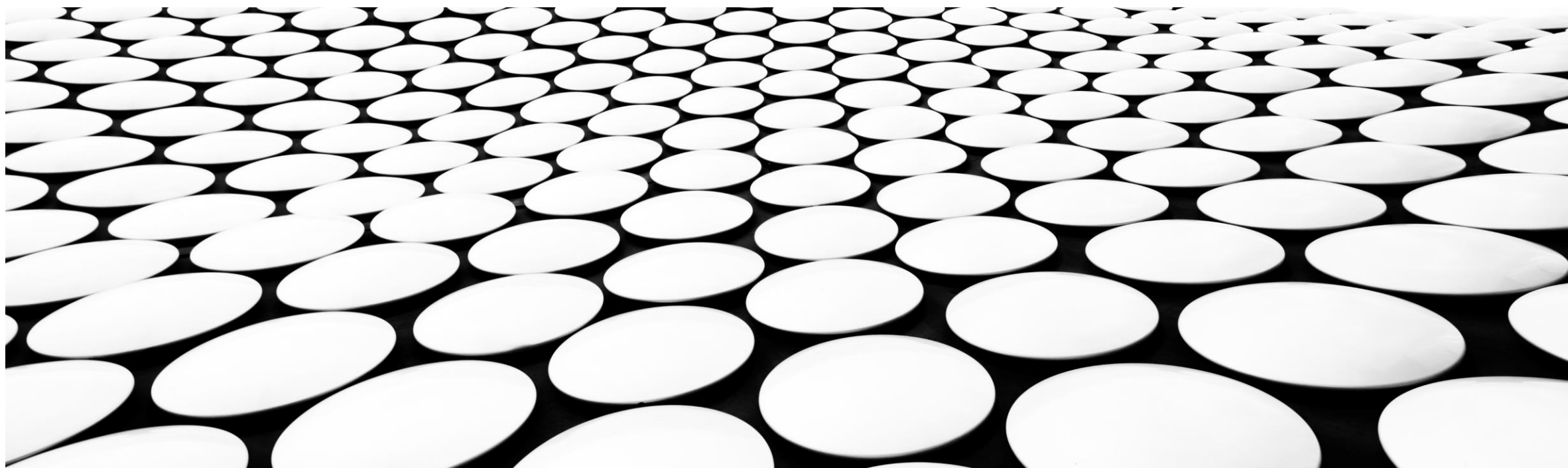
גיאומטריה

מכינה 2024

יחידה תשיעית

(שיעורים 25-26-27)

פרופורציה ודמיון



דוגמאות הוכחה:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot b \cdot d &= \frac{c}{d} \cdot b \cdot d \\ \Leftrightarrow a \cdot d &= b \cdot c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 &= \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} &= \frac{c+d}{d},\end{aligned}$$

פרופורציה

חוקי פרופורציה

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$



$$a \cdot d = c \cdot b$$



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

הגדרה: פרופורציה היא
שוויון יחסים

ארבע מספרים:
 a, b, c, d
פרופורציונליים
אם מתקיים:

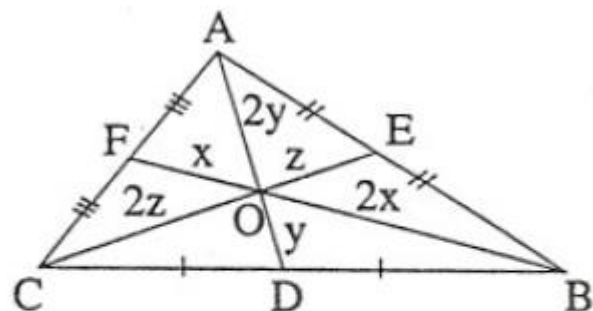
$$a : b = c : d$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

לדוגמא:

$$\frac{8}{4} = \frac{10}{5}$$

לדוגמא:



$$BO = 2OF$$

$$CO = 2OE$$

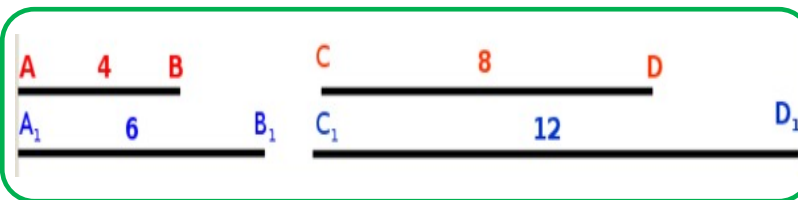
$$AO = 2OD$$

$$\frac{BO}{OF} = \frac{CO}{OE}$$

BO, OF, CO, OE
קטעים פרופורציונליים

קטעים פרופורציונליים

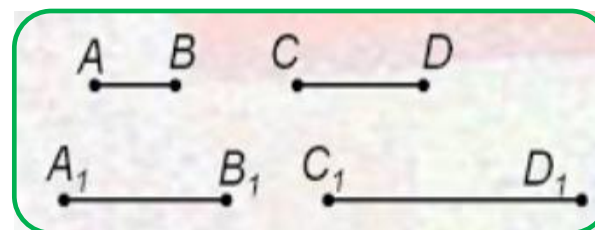
לדוגמא:



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \quad \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}$$

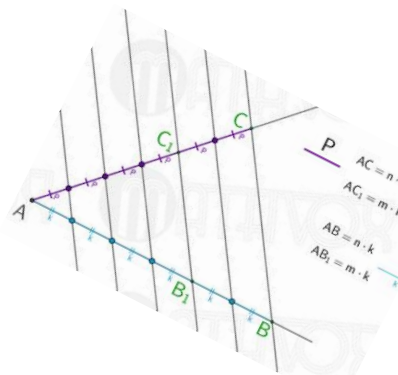
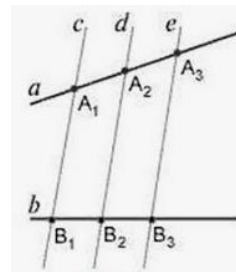
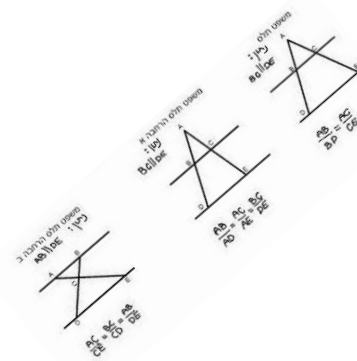
הגדרה: ארבע קטעים
הם קטעים
פרופורציונליים אם
אורכיהם מספרים
פרופורציונליים



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$$

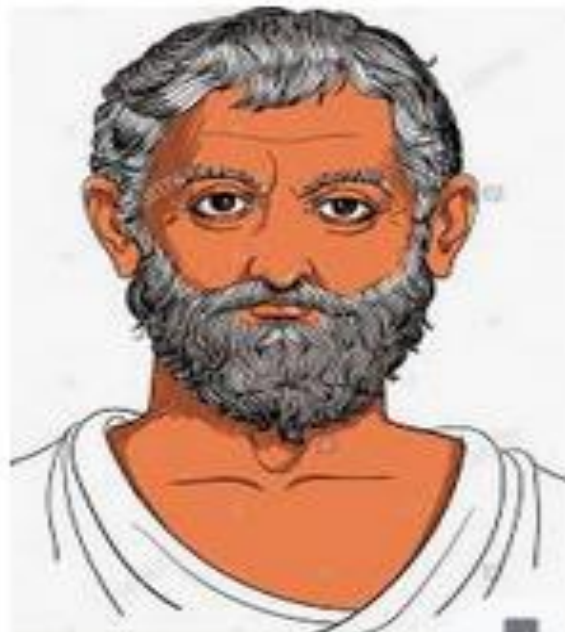
תאלס איש מילטוס

- "דע את עצמך."
- "הכל מים."
- "ההכרח הוא החזק שבדברים."
- "מיהו מאושר? אדם היודע לשאת בסבלותיו, עשיר ומלומד."
- "אין בנמצא דבר נדיר יותר מאשר עריץ זקן."
- "האמצעי כדי לשאת בסבל הוא למצוא מישהו אומלל יותר."
- "כדי לנהל את חיינו כראוי אין עלינו אלא להימנע ממה שאנו מגנים אצל הזולת."
- "הזמן הוא החכם מכל הדברים; הוא מגלה הכול."
- "עלינו לכבד תמיד את חברינו, בנוכחותם או בהיעדרם."
- "אין זה די להיות נקי כפיים; צריך להיות בעל נפש טהורה."
- "כפי שאתה מתייחס להוריק, ילדיך יתייחסו אליך."
- "מילים רבות אינן מצביעות על מוח נבון."
- "הדבר הקשה שבעולם הוא להכיר את עצמך."
- "דבר אינו פעיל יותר מאשר **המחשבה**."
- "המים מהווים את העיקרון של כל הדברים."
- "התקווה מהווה את הטוב היחיד המשותף לכל בני האדם."
- "העבר בטוח, העתיד עלום."
- "איזה **אדם** שמח? מי שיש לו גוף בריא, נפש בעלת תושייה, ואופי צייתני."

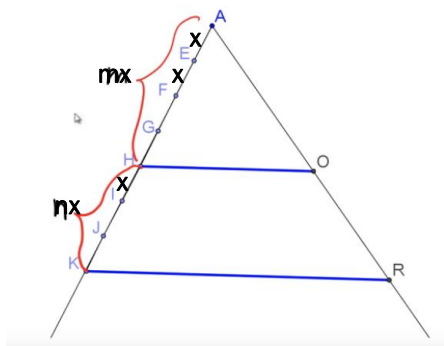


תאלס איש מילטוס (ביוונית: Θαλής)

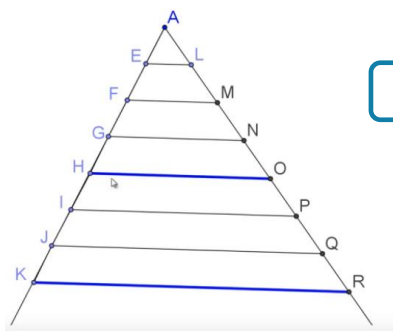
(בערך 624 - 546 לפנה"ס)



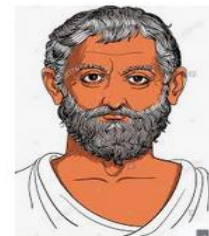
1. נחלק את AK ל
לקטעים שווים כך
שאורך של כל קטע
שווה ל x .
 $AH=mx, HK=nx$



2. נעביר דרך קצוות הקטעים
שנוצרו ישרים מקבילים ל HO ו KR
 $EL \parallel FM \parallel \dots \parallel HO \parallel IP \parallel \dots \parallel KR$

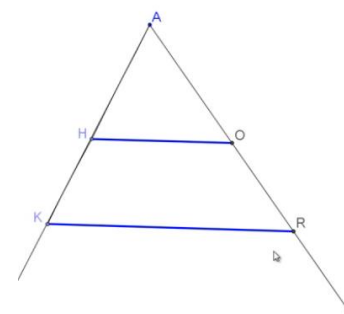


"דבר אינו פעיל יותר מאשר המחשבה."



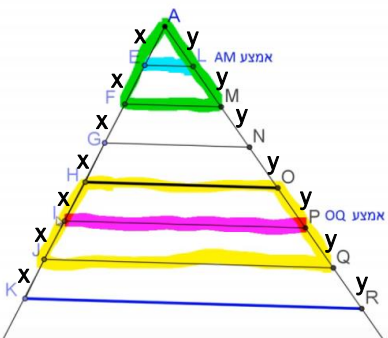
משפט תאלס בזווית

שני ישרים מקבילים
החותכים שוקי זווית,
מקצים עליהן קטעים
פרופורציונליים

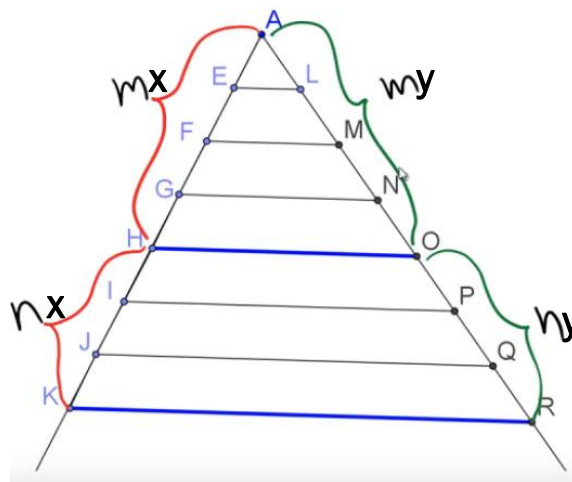


נתון: $\angle A$
 $HO \parallel KR$
צ.ל.: $\frac{AH}{HL} = \frac{AO}{OR}$

3. ב $\triangle FAM$
AF אמצע E, $EL \parallel FM$
לכן קטע אמצעים
לכן $LM = AL = y$



4. בטרפז HOQJ
JN ו HO ו IP, I אמצע JH
לכן IP קטע אמצעים
לכן $OP = PQ = y$



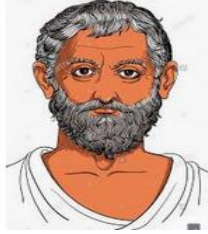
5. $AH=mx, HK=nx$
 $AO=my, OR=ny$

$$\frac{AH}{HK} = \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

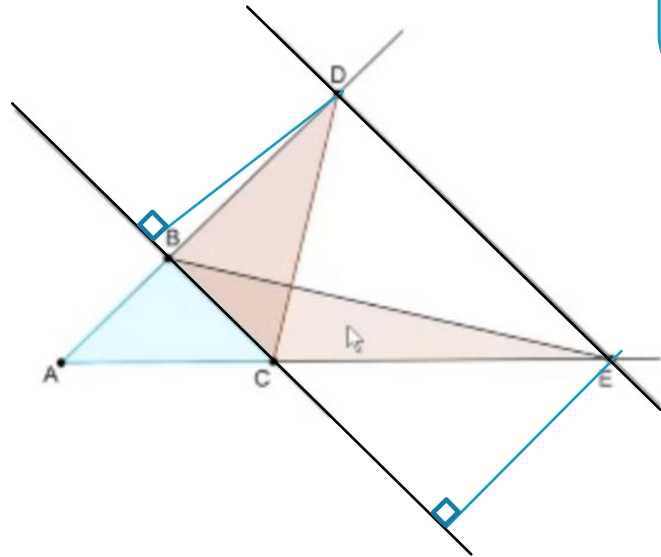
$$\frac{AO}{OR} = \frac{my}{ny} = \frac{m}{n}$$

$$6. \frac{AH}{HL} = \frac{AO}{OR}$$

משפט תאלס בזווית



בניית עזר: נעביר קטעים
 $CD \perp BE$
 נוריד מנקודה E אנכים ל BC



על פי המשפט: קטע שיוצא
 מקודקוד המשולש מחלק אותו
 לשני משולשים שיחס השטחים
 שלהם שווה ליחס הקטעים
 שעליהם מחלק הקטע את צלע
 שמול הקודקוד

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCE}} = \frac{AC}{CE} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AB}{BD} \quad (2)$$

כי יש להם בסיס משותף
 BC וגבהים שלהם שווים
 כשני אנכים בין ישרים
 מקבילים

$$S_{BCD} = S_{BCE} \quad (3)$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCE}} = \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} \quad (4)$$

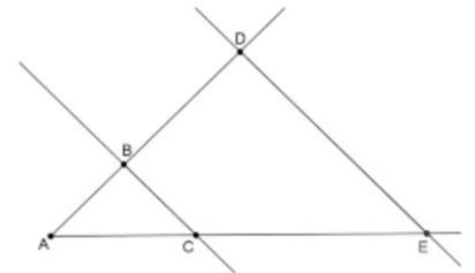
$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \quad (5)$$

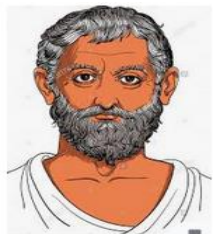
על פי 3

על פי 1,2,4

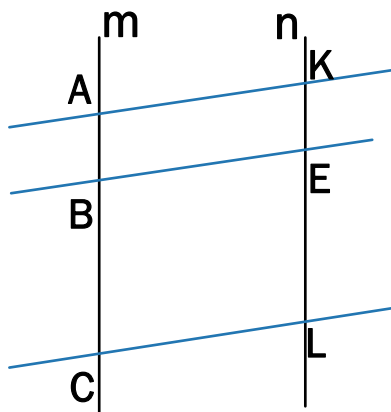
שני ישרים מקבילים
 החותכים שוקי זווית,
 מקצים עליהן קטעים
 פרופורציונליים

נתון: $BC \parallel DE$
 צ"ל: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$



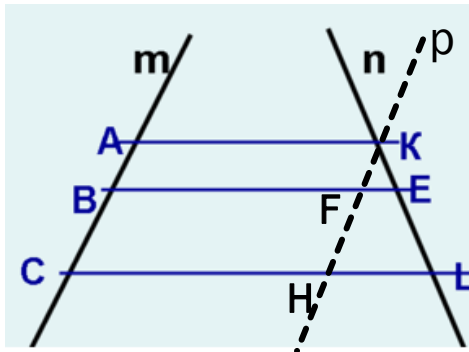


מיקרה שני: $m \parallel n$



1. $CBFH, AKEB$ מקבילות (מרובעים עם שתי זוגות צלעות מקבילות על פי הנתון ובניית עזר
2. $BC=EL, AB=KE$ (צלעות נגדיות במקבילית)
3. $\frac{KE}{EL} = \frac{AB}{BC} = 1$ על פי 2 מ.ש.ל.

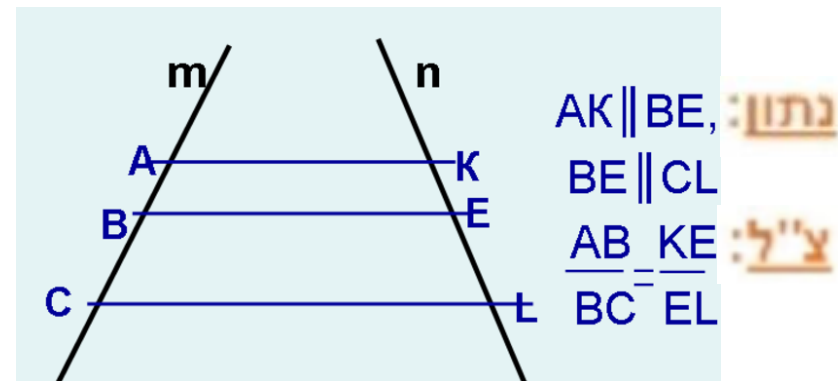
מיקרה ראשון: $m \nparallel n$

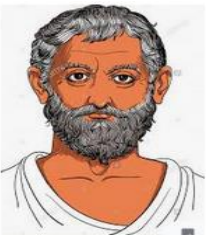


1. נעביר דרך נקודה K ישר מקביל ל m
2. נסמן: $F=p \cap BE, H=p \cap CL$
3. $CBFH, AKFB$ מקבילות (מרובעים עם שתי זוגות צלעות מקבילות על פי הנתון ובניית עזר
4. $BC=FH, AB=KF$ (צלעות נגדיות במקבילית)
5. $\frac{KF}{FH} = \frac{KE}{EL}$ על פי משפט תאלס בזווית
6. $\frac{AB}{BC} = \frac{KE}{EL}$ על פי 4,5 מ.ש.ל.

משפט תאלס כללי

אם חותכים שני ישרים על ידי שלושה ישרים מקבילים אז הקטעים שנוצרו על ישר אחד פרופורציונליים לקטעים שנוצרו על הישר השני





משפט הפוך למשפט תאלס כללי

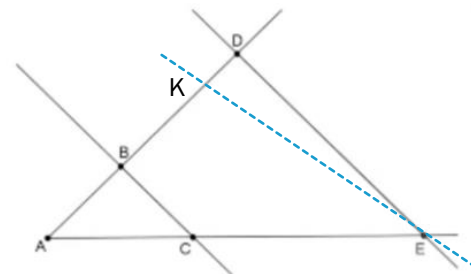
אם חותכים שני ישרים
על ידי שלושה ישרים
ששניים מהם מקבילים
זה לזה וקטעים שנוצרו
על ישר אחד
פרופורציונליים לקטעים
שנוצרו על הישר השני
אז גם הישר החותך
השלישי מקביל לשניים
האחרים

משפטי תאלס הפוכים

1. נוכיח בשלילה. נניח ש $BC \nparallel DE$
2. נעביר דרך נקודה E ישר מקביל ל BC, נסמן נקודת החיתוך שלו עם הקרן השנייה של הזווית K ($K \neq D$). $EK \parallel BC$.
3. על פי משפט תאלס בזווית $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BK}$.
4. $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}$ על פי נתון
5. $BK = BD$ על פי 3, 4 וחוקי פרופורציה סתירה! כי על פי ההנחה $K \neq D$.
לכן ההנחה לא נכונה ו $BC \parallel DE$. מ.ש.ל.

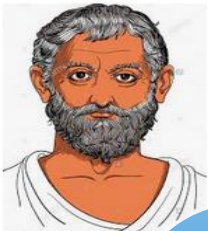
משפט הפוך למשפט תאלס בזווית

אם שני ישרים החותכים
שוקי זווית, מקצים עליהן
קטעים פרופורציונליים
אז הישרים מקבילים זה
לזה



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \quad \text{נתון:}$$

$$BC \parallel DE \quad \text{צ"ל:}$$

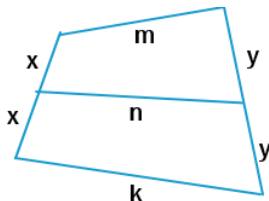


טענה לא נכונה!

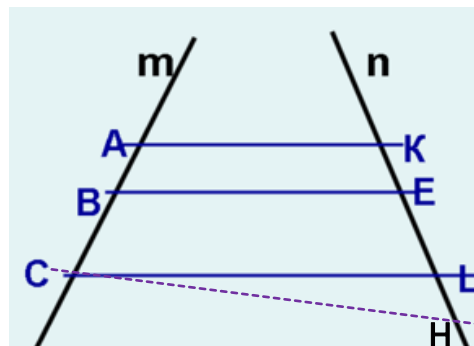
אם חותכים שני ישרים
על ידי שלושה ישרים
וקטעים שנוצרו על ישר
אחד פרופורציונליים
לקטעים שנוצרו על
הישר השני
אז שלושה ישר החותך
מקבילים זה לזה.

דוגמא נגדית

למרות שמתקיים $\frac{x}{x} = \frac{y}{y}$
הישרים m, n, k לא
מקבילים



משפטי תאלס הפוכים

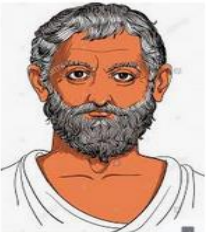


נתון:
 $AK \parallel BE,$
 $\frac{AB}{BC} = \frac{KE}{EL}$
צ"ל: $BE \parallel CL$

1. נוכיח בשלילה. נניח ש $BE \not\parallel CL$
2. נעביר דרך נקודה C ישר מקביל ל BE, נסמן נקודת החיתוך שלו עם הקרן השנייה של הזווית H כ $H \neq L$. $CH \parallel BE$.
3. על פי משפט תאלס כללי $\frac{AB}{BC} = \frac{KE}{EH}$.
4. על פי נתון $\frac{AB}{BC} = \frac{KE}{EL}$.
5. $EL = EH$ על פי 3, 4 וחוקי פרופורציה סתירה! כי על פי ההנחה $L \neq D$. לכן ההנחה לא נכונה ו $BE \parallel CL$. מ.ש.ל.

משפט נכון

אם חותכים שני ישרים
על ידי שלושה ישרים
ששניים מהם מקבילים
זה לזה וקטעים שנוצרו
על ישר אחד
פרופורציונליים לקטעים
שנוצרו על הישר השני
אז גם הישר החותך
השלישי מקביל לשניים
האחרים

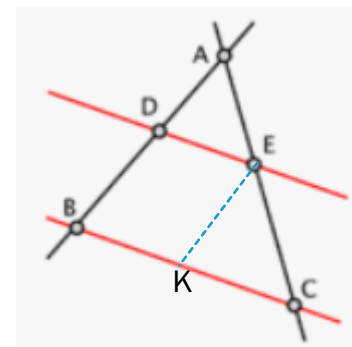


משפטי תאלס מורחב

הרחבה ראשונה של
משפט תאלס

שני ישרים מקבילים
החותכים שוקי זווית, יוצרים
שני משולשים כך שצלעות
של משולש אחד
פרופורציונליות בהתאמה
לצלעות של משולש אחר.

נימוק	טענה	
על פי משפט תאלס בזווית ($DE \parallel BC, \angle A$)	$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$	1
על פי 1 וחוקי פרופורציה	$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$	2
ב"ע	נעביר דרך נקודה E: $EK \parallel AB$ ($K \in BC$)	3
על פי ההגדרה, נתון, 3	BDEK מקבילית	4
צלעות נגדיות במקבילית	$DE = BK$	5
על פי משפט תאלס בזווית ($KE \parallel BA, \angle C$)	$\frac{CK}{BK} = \frac{CE}{AE}$	6
על פי 6 וחוקי פרופורציה	$\frac{BK}{BC} = \frac{AE}{AC}$	7
5,8	$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$	8
2,8	$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$	
	מ.ש.ל.	

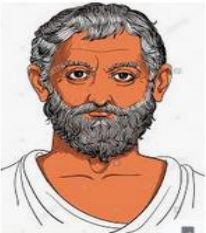


נתון:

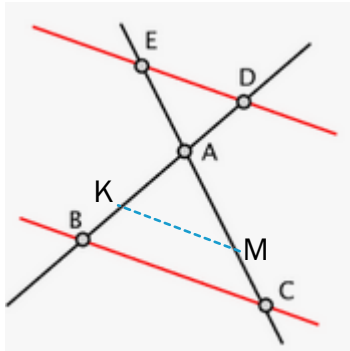
$DE \parallel BC$

צ"ל:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



הרכבה שנייה של משפט תאלס



נתון:

$$DE \parallel BC$$

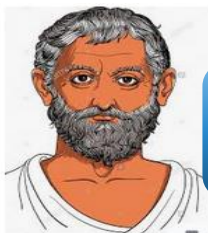
צ"ל:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

- נתבונן בקטעים EA ו AC. קיימות 3 אפשרויות:
 $EA=AC$, $EA<AC$, $EA>AC$
- אם $EA=AC$ נחפוף $\triangle EAD$ ו $\triangle CAB$
 $\angle EAD = \angle CAB$ ז. קודקודיות
 $EA=AC$ הנחה
 $\angle AED = \angle ACB$ ז. מתחלפות ($ED \parallel BC$, ק"ח EC)
 $\triangle CAB \cong \triangle EAD$ על פי ז.צ.ז.
- $BC=ED$, $AB=DA$, $AC=EA$ צ.מ.ב.ח.
- על פי 3 $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$
- אם EA לא שווה ל AC נניח בלי הגבלת הכלליות ש $EA<AC$. אם כך אז בתוך הקטע AC נסמן נקודה M ש $AE=AM$.
- נעביר דרך נקודה M: $MK \parallel BC$ ($K \in AB$)

משפטי תאלס מורחב

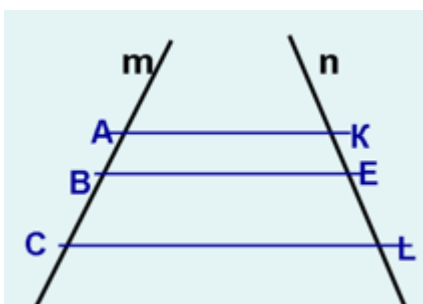
נימוק	טענה	
על פי הרכבה ראשונה של משפט תאלס בזווית ($KM \parallel BC$, $\angle A$)	$\frac{AK}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{KM}{BC}$	7
	נחפוף $\triangle EAD$ ו $\triangle MAK$	8
ז. קודקודיות	$\angle EAD = \angle MAK$	
על פי 5	$EA=AM$	
ז. מתחלפות ($ED \parallel BC$ ו $KM \parallel BC$, ק"ח EC)	$\angle AED = \angle AMK$	
ז.צ.ז.	$\triangle EAD \cong \triangle MAK$	
צ.מ.ב.ח. 8,	$EA=AM$, $DA=AK$, $ED=KM$	9
7,9	$\frac{ED}{BC} = \frac{DA}{AB} = \frac{EA}{AC}$	10
	מ.ש.ל.	



4 משפט הפוך למשפט תאלס כללי

אם חותכים שני ישרים על ידי שלושה ישרים ששניים מהם מקבילים זה לזה וקטעים שנוצרו על ישר אחד פרופורציונליים לקטעים שנוצרו על הישר השני אז גם הישר החותך השלישי מקביל לשניים האחרים

נתון:



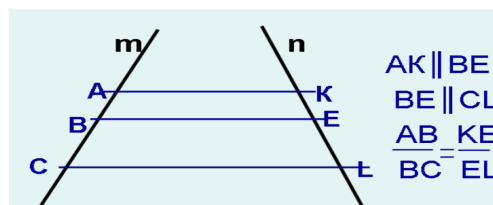
$$\begin{aligned} AK &\parallel BE, \\ \frac{AB}{BC} &= \frac{KE}{EL} \end{aligned}$$

$$BE \parallel CL \quad \text{צ"ל:}$$

משפטי תאלס סיכום

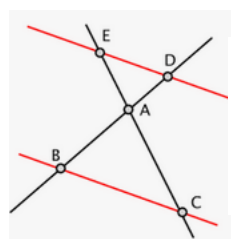
3 משפט תאלס כללי

אם חותכים שני ישרים על ידי שלושה ישרים מקבילים אז הקטעים שנוצרו על ישר אחד פרופורציונליים לקטעים שנוצרו על הישר השני



$$\begin{aligned} \text{נתון:} \quad & AK \parallel BE, \\ & BE \parallel CL \\ & \frac{AB}{BC} = \frac{KE}{EL} \end{aligned}$$

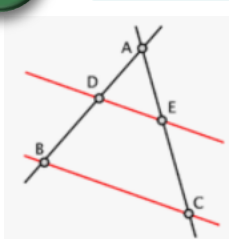
6 הרחבה שנייה של משפט תאלס



$$\text{נתון: } DE \parallel BC$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{צ"ל:}$$

5 הרחבה ראשונה של משפט תאלס

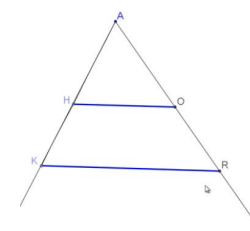


$$\text{נתון: } DE \parallel BC$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{צ"ל:}$$

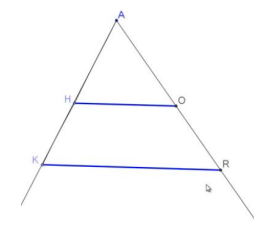
1 משפט תאלס בזווית

שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציונליים



$$\begin{aligned} \text{נתון: } & \angle A \\ & HO \parallel KR \\ \text{צ"ל: } & \frac{AH}{HL} = \frac{AO}{OR} \end{aligned}$$

2 משפט הפוך למשפט תאלס בזווית

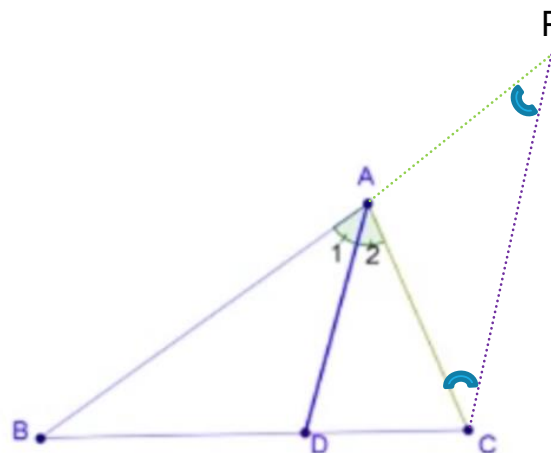


$$\text{נתון: } \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

$$\text{צ"ל: } BC \parallel DE$$

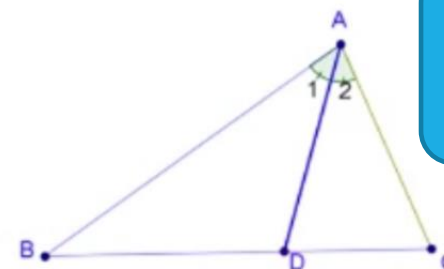
משפט על חוצה זווית

נימוק	טענה	
במשולש ($\triangle APC$) מול זוויות שוות צלעות שוות, 5	$AC=AP$	6
משפט תאלס ($PC \parallel AD, \angle B$)	$\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{DC}$	7
ע"פ 7,8	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$	8
	מ.ש.ל.	



חוצה זווית פנימית של
המשולש מחלק את הצלע
שמול הזווית לשני קטעים
אשר היחס ביניהם שווה ליחס
הצלעות הכלואות את הזוויות
בהתאמה

נימוק	טענה	
ב"ע	נמשיך את AB, נעביר דרך נקודה C ישר מקביל ל AD: $PC \parallel AD$ ($P \in AB$)	1
זוויות מתאימות ($PC \parallel AD$), ק"ח" (BP)	$\angle P = \angle A_1$	2
זוויות מתחלפות ($PC \parallel AD$), ק"ח" (AC)	$\angle ACP = \angle A_2$	3
נתון	$\angle A_1 = \angle A_2$	4
על פי 2-4	$\angle ACP = \angle P$	5

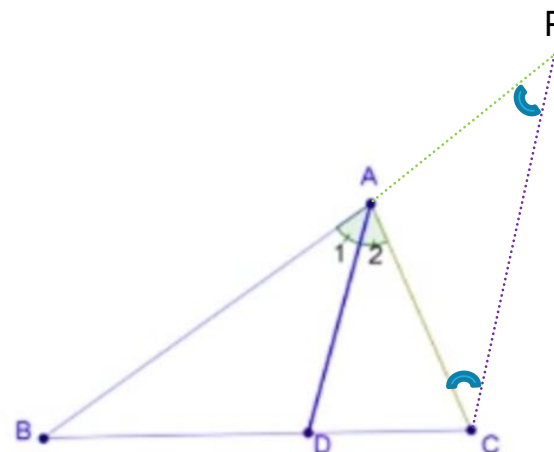


נתון: $\triangle ABC$
 $\angle A_1 = \angle A_2$

צ.ל. $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

משפט הפוך על חוצה זווית

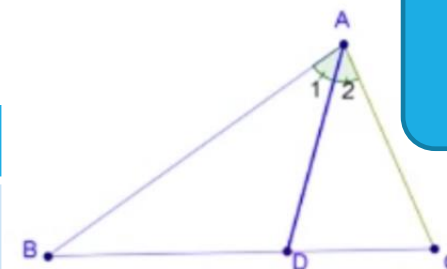
נימוק	טענה	
משפט תאלס ($PC \parallel AD, \angle B$)	$\frac{AB}{AP} = \frac{BD}{DC}$	4
ע"פ 7,8	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$	5
חוקי פרופורציה, 4,5	$AC=AP$	6
במשולש ($\triangle ACP$) מול צלעות שוות זוויות שוות	$\angle ACP = \angle P$	7
ע"פ 2,3,7	$\angle A_1 = \angle A_2$	8
	מ.ש.ל.	



אם קטע שיוצא מקודקוד המשולש מחלק את הצלע שממול לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות בהתאמה אז הקטע הוא חוצה זווית

נתון: $\triangle ABC$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



צ.ל.

$$\angle A_1 = \angle A_2$$

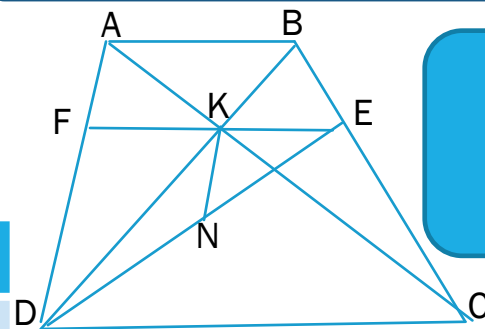
נימוק	טענה	
ב"ע	נמשך את AB, נעביר דרך נקודה C ישר מקביל ל AD: $PC \parallel AD$ ($P \in AB$)	1
זוויות מתאימות ($PC \parallel AD$), ק"ח BP	$\angle P = \angle A_1$	2
זוויות מתחלפות ($PC \parallel AD$), ק"ח AC	$\angle ACP = \angle A_2$	3

תרגיל לדוגמא

נימוק	טענה	
קטע שיוצא מאמצע הצלע ומקביל לצלע השלישית, נתון, 6	KN קטע אמצעים במשולש FED	7
7	$DN = NE$	8
	מ.ש.ל.	

נימוק	טענה	
הרחבה ראשונה של משפט תאלס ($KE \parallel AB, \angle ACB$)	$\frac{KE}{AB} = \frac{CE}{CB} = \frac{CK}{CA}$	1
הרחבה ראשונה של משפט תאלס ($KE \parallel AB, \angle ADB$)	$\frac{KF}{AB} = \frac{DF}{DA} = \frac{DK}{DB}$	2
הרחבה שנייה של משפט תאלס ($DC \parallel AB, \angle K$)	$\frac{CK}{KA} = \frac{DK}{KB}$	3
חוקי פרופורציה, 3	$\frac{CK}{CA} = \frac{DK}{DB}$	4
על פי 1,2,4	$\frac{KE}{AB} = \frac{KF}{AB}$	5
5, חוקי פרופורציה	$KE = KF$	6

בני גורן, עמ' 272, ת. 24



נתון: טרפז
ABCD
 $DC \parallel KE$
 $AD \parallel KN$

צ.ל. : $NE = DN$

הוכחה:

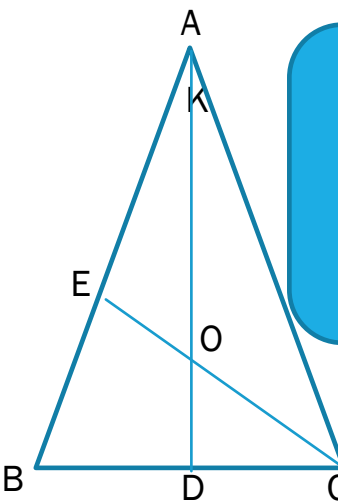
נוכיח ש נקודה K
היא אמצע EF
(שימו לב
להוכחה. בהרבה
יש צורך להוכיח
את הטענה זו).

תרגיל לדוגמא

הוכחה:

בני גורן, עמ' 280, ת. 50

נתון: $\triangle ABC$ שווה שוקיים, $AC=10$, $AD \perp BC$, $BC=12$
 $\frac{AE}{BE} = \frac{5}{6}$



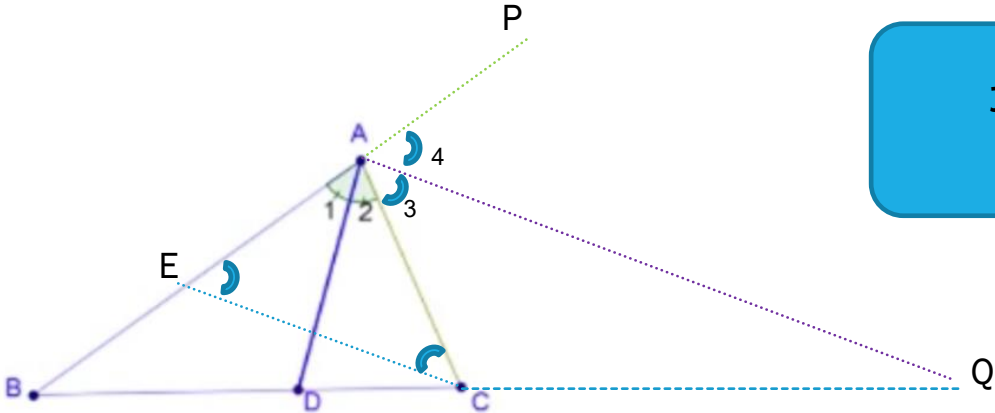
צ.ל. : א. O מרכז המעגל החסום במשולש
 ב. חשבו רדיוס המעגל

נימוק	טענה	
נתון	$\frac{AC}{BC} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$	1
נתון, 1	$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$	2
על פי המשפט ההפוך למשפט על חוצה זווית, 2	CE חוצה זווית ACB	3
גובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם חוצה זווית, נתון	AD חוצה זווית BAC	4
	$O = AD \cap CE$	5
מפגש חוצי זוויות, 3,4	מרכז המעגל החסום במשולש O	6

נימוק	טענה	
גובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם, תיכון, נתון	$BD=DC=6$	7
משפט פתגורוס ב $\triangle ADC$	$AD^2 + DC^2 = AC^2$	8
7,8, נתון	$AD^2 + 6^2 = 10^2$	9
9	$AD = 8$	10
	נסמן $x = DO$	11
על פי 10,11	$AO = 8 - x$	12
על פי הנתון	CO חוצה זווית ACD במשולש	13
על פי המשפט על חוצה זווית	$\frac{DO}{AO} = \frac{DC}{AC}$	14
על פי 14,11,12,7	$\frac{x}{8-x} = \frac{6}{10}$	15
15	$10x = 48 - 6x$	16
16	$x = 3$	17
נתון	$OD \perp BC$	18
17,18	רדיוס המעגל החסום $OD = 3$	19
	מ.ש.ל	

נימוק	טענה	
במשולש (ΔAEC) מול זוויות שוות צלעות שוות, 5	AC=AE	6
משפט תאלס (PC AD, ∠B)	$\frac{AB}{AE} = \frac{BQ}{QC}$	7
ע"פ 7,8	$\frac{AB}{AC} = \frac{BQ}{QC}$	8
	מ.ש.ל.	

משפט על חוצה זווית חיצונית



נתון: $\triangle CAP, \triangle ABC$ חיצונית
נתון: $\angle A_3 = \angle A_4$

צ.ל. $\frac{BQ}{CQ} = \frac{AB}{AC}$

חלוקה הרמונית



נתון קטע BC
נקודה D בתוך הקטע
נקודה Q על המשך הקטע מצד נקודה C
הגדרה: נקודות Q ו D מחקות את הקטע
והמשכו חלוקה הרמונית אם מתקיים:
 $\frac{BD}{DC} = \frac{BQ}{CQ}$

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר דרך נקודה C ישר מקביל ל (P ∈ AB) CE AQ: AQ	1
זוויות מתאימות (AQ EC, ק"ח BP)	$\angle AEC = \angle A_4$	2
זוויות מתחלפות (AQ EC, ק"ח AC)	$\angle ACE = \angle A_3$	3
נתון	$\angle A_3 = \angle A_4$	4
על פי 2-4	$\angle ACE = \angle AEC$	5

נשים לב שזווית בין
חוצי הזוויות פנימית
וחיצונית ישרה
 $\angle DAQ = 90^\circ$

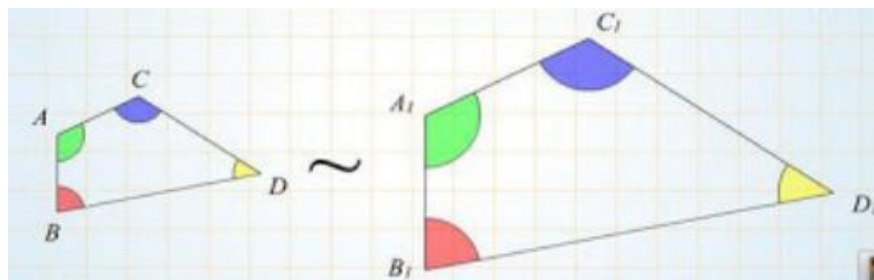
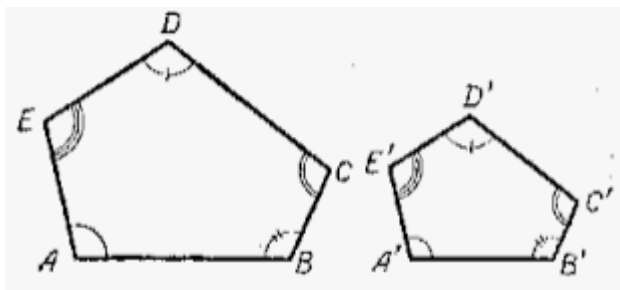
גיאומטריה

מכינה 2023
יחידה עשירית
(שיעורים 28-29-30)

דמיון משולשים



דמיון מצולעים



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = k$$

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \angle D = \angle D_1$$

$$\Downarrow$$

$$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$$



$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

הגדרה: שני מצולעים הם מצולעים דומים אם כל הזוויות שמצולע אחד שוות לכול הזוויות של המצולע השני וכל הצלעות שלהם פרופורציונליות בהתאמה

הגדרה: שני משולשים הם משולשים דומים אם שלוש זוויות של משולש אחד שוות לשלוש זוויות של המשולש השני וכל הצלעות שלהם פרופורציונליות בהתאמה

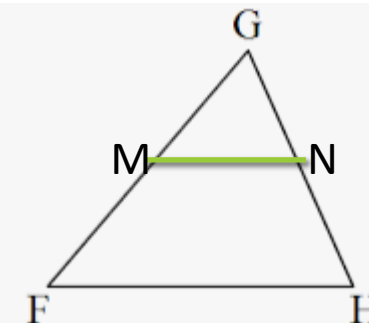




משפטי דמיון

למא (משפט עזר)

אם בתוך המשולש
מעבירים ישר מקביל
לאחת הצלעות אז
המשולש שנוצר דומה
למשולש המקורי



נתון: $\triangle FGH$
 $MN \parallel FH$
צ.ל. $\triangle FGH \sim \triangle MGN$

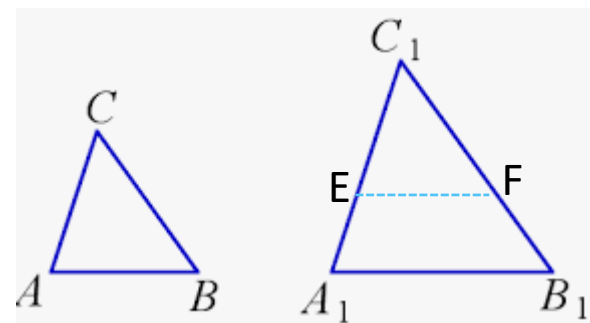
נימוק	טענה	
על פי החבה הראשונה של משפט תאלס ($\angle G, MN \parallel FH$)	$\frac{MG}{FG} = \frac{NG}{HG} = \frac{MN}{FH}$	1
זוויות מתאימות ($\angle F, MN \parallel FH$, ק"ח FG)	$\angle GMN = \angle F$	2
זוויות מתאימות ($\angle H, MN \parallel FH$, ק"ח HG)	$\angle GNM = \angle H$	3
משותפת	$\angle G$	4
על פי ההגדרה, 1-4	$\triangle FGH \sim \triangle MGN$	5
	מ.ש.ל.	



משפטי דמיון

משפט דמיון הראשון

אם שתי זוויות במשולש שוות לשתי זוויות במשולש אחר אז המשולשים דומים



נתון: $\Delta A_1B_1C_1, \Delta ABC$
 $\angle A = \angle A_1$
 $\angle B = \angle B_1$
 צל: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

טענה	נימוק	
1 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$	סכום זוויות במשולש (ΔABC)	
2 $\angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1$	סכום זוויות במשולש ($\Delta A_1B_1C_1$)	
3 $\angle C = \angle C_1$	על פי 1, 2, נתון	
8 $\Delta EC_1F \sim \Delta A_1C_1B_1$	על פי משפט למא 7,	
	נחפוף ΔEC_1F ו- ΔACB	
9 $\angle A_1 = \angle FEC_1$	זוויות מתאימות ($EF \parallel A_1B_1$ ק"ח A_1C_1)	
10 $\angle A = \angle A_1$	נתון	
11 $\angle A = \angle FEC_1$	9, 10	
12 $EC_1 = AC$	6	
13 $\angle C = \angle C_1$	3	
14 $\Delta ACB \cong \Delta EC_1F$	ז.צ.ז., 11-13	
15 $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$	8, 14 למשולשים חופפים כל הצלעות וכל הזוויות שוות בהתאמה	
	מ.ש.ל.	

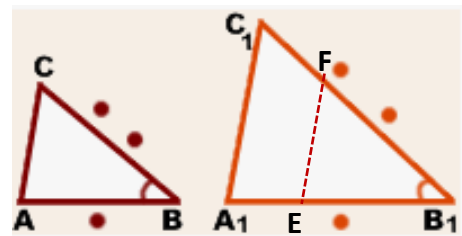
4. נתבונן בקטעים AC ו- A_1C_1 .
 קיימות שלוש אפשרויות:
 א. $A_1C_1 = AC$
 אם כך אז $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta ABC$ על פי זווית (3), צלע (א) זווית (נתון)
 לכן $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$
 ב. $A_1C_1 > AC$
 ג. $A_1C_1 < AC$
5. נניח בלי הגבלת הכלליות ש $A_1C_1 > AC$
6. אם כך אז בתוך הקטע A_1C_1 קיימת נקודה E כך ש $EC_1 = AC$
7. נעביר דרך נקודה E קטע $EF \parallel A_1B_1$



משפטי דמיון

משפט דמיון השני

אם שתי צלעות של משולש אחד פרופורציונליות לשתי צלעות של משולש אחר והזוויות בין הצלעות האלה בשני המשולשים שוות זו לזו אז המשולשים דומים



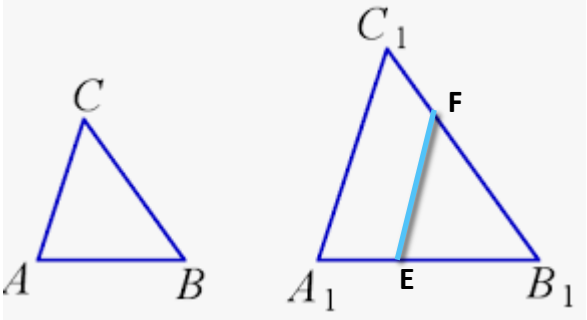
נתון: $\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$
 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$
 $\angle B = \angle B_1$
 צ.ל. $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

נימוק	טענה	
על פי משפט למא (EF ו- A_1C_1)	$\Delta EB_1F \sim \Delta A_1B_1C_1$	5
על פי משפט תאלס מורחב ($\angle B_1$, EF ו- A_1C_1)	$\frac{EB_1}{A_1B_1} = \frac{FB_1}{B_1C_1}$	6
נתון	$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$	7
6, 7, 3, כללי פרופורציה (אם שלושה איברים של פרופורציה שווים אז גם הרביעי שווה)	$FB_1 = BC$	8
	נחפוף ΔEB_1F ו- ΔABC	
3	$EB_1 = AB$	9
נתון	$\angle B = \angle B_1$	10
8	$FB_1 = BC$	11
11-13, ז.צ.ז.	$\Delta ABC \cong \Delta EB_1F$	14
5, 14, למשולשים חופפים כל הצלעות וכל הזוויות שוות בהתאמה	$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$	15
	מ.ש.ל.	

- נתבונן בקטעים AB ו- A_1B_1 . קיימות שלוש אפשרויות:
 א. $A_1B_1 = AB$
 אם כך אז $\frac{AB}{A_1B_1} = 1$, על פי הנתון $\frac{BC}{B_1C_1} = 1$ לכן $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ לכן $B_1C_1 = BC$
 $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta ABC$ על פי צלע, זווית, צלע
 לכן $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$
 ב. $A_1B_1 > AB$
 ג. $A_1B_1 < AB$
- נניח בלי הגבלת הכלליות ש $A_1B_1 > AB$
- אם כך אז בתוך הקטע A_1B_1 קיימת נקודה E כך ש $EB_1 = BA$
- נעביר דרך נקודה E קטע EF ו- A_1C_1

משפט דמיון השלישי

אם שלוש צלעות של משולש אחד פרופורציונליות לשלוש צלעות של משולש אחר אז המשולשים דומים



נתון: $\Delta A_1B_1C_1, \Delta ABC$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

צ.ל. $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

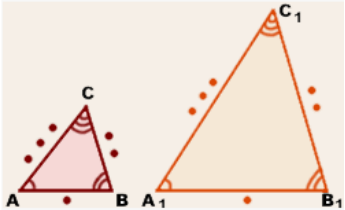
משפטי דמיון

נימוק	טענה	
על פי משפט למא ($A_1C_1 \parallel EF$)	$\Delta EBF \sim \Delta A_1B_1C_1$	5
על פי משפט תאלס מורחב ($A_1C_1 \parallel EF, B_1$)	$\frac{EB_1}{A_1B_1} = \frac{FB_1}{B_1C_1} = \frac{EF}{A_1C_1}$	6
נתון	$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$	7
3,6,7 כללי פרופורציה (אם שלושה איברים של פרופורציה שווים אז גם הרביעי שווה)	$FB_1=BC$ $EF=AC$	8
צ.צ.צ., 3,8	$\Delta ABC \cong \Delta EBF$	9
5,9 למשולשים חופפים כל הצלעות וכל הזוויות שוות בהתאמה	$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$	10
	מ.ש.ל.	

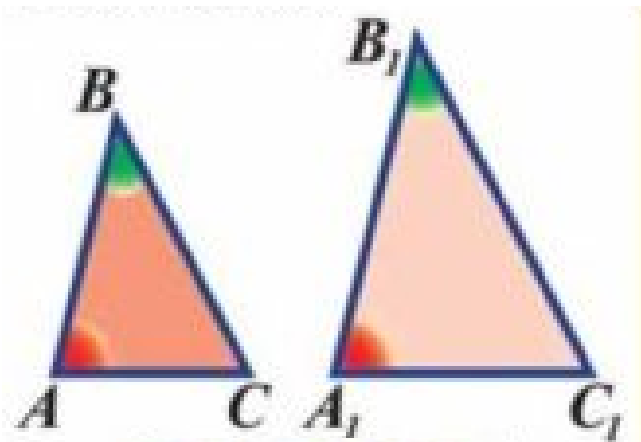


- נתבונן בקטעים AB ו A_1B_1 . קיימות שלוש אפשרויות:
א. $A_1B_1 = AB$
אם כך אז $\frac{AB}{A_1B_1} = 1$, על פי הנתון $\frac{AC}{A_1C_1} = 1$ לכן $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$
לכן $A_1C_1=AC, B_1C_1 = BC$
 $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta ABC$ על פי צלע, צלע, צלע
לכן $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$
ב. $A_1B_1 > AB$
ג. $A_1B_1 < AB$
- נניח בלי הגבלת הכלליות ש $A_1B_1 > AB$
- אם כך אז בתוך הקטע A_1B_1 קיימת נקודה E כך ש $EB_1 = BA$
- נעביר דרך נקודה E קטע $EF \parallel A_1C_1$

סיכום דמיון משולשים



משפט דמיון הראשון



$$\angle A = \angle A_1$$

$$\angle B = \angle B_1$$

משפט דמיון ראשון – ז"ז

אם שתי זוויות במשולש אחד שוות בהתאמה לשתי זוויות במשולש שני, אז המשולשים דומים.

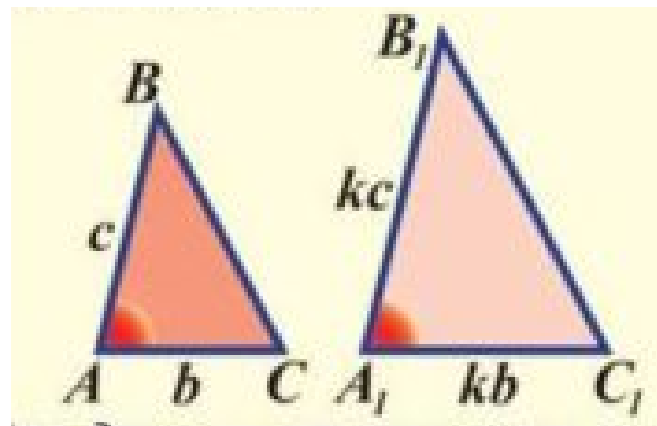
משפט דמיון שני – צ"צ

אם שני משולשים שווים בזווית אחת ושתי הצלעות הכולאות את הזווית במשולש אחד מתייחסות באותו יחס לשתי הצלעות הכולאות את הזווית במשולש השני, אז המשולשים דומים.

משפט דמיון שלישי – צ"צ"צ

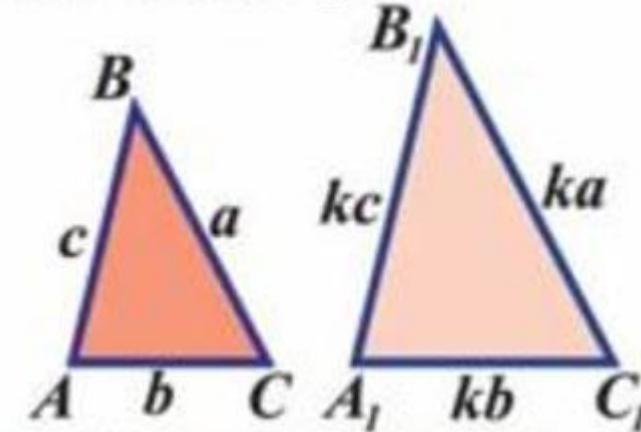
אם שלוש צלעות של משולש אחד מתייחסות באותו יחס לשלוש צלעות של משולש שני, אז המשולשים דומים.

משפט דמיון השני



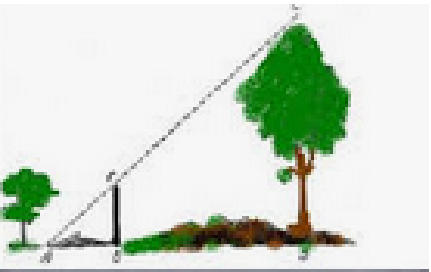
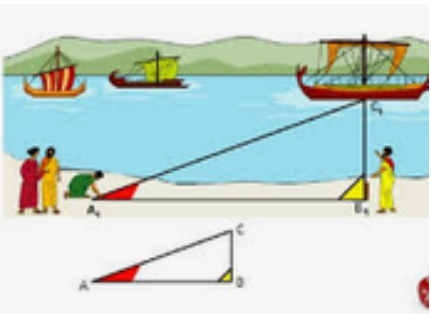
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k; \angle A = \angle A_1$$

משפט דמיון השלישי



$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$$

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$$

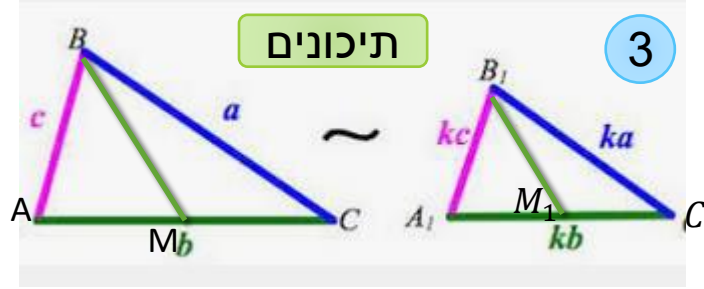
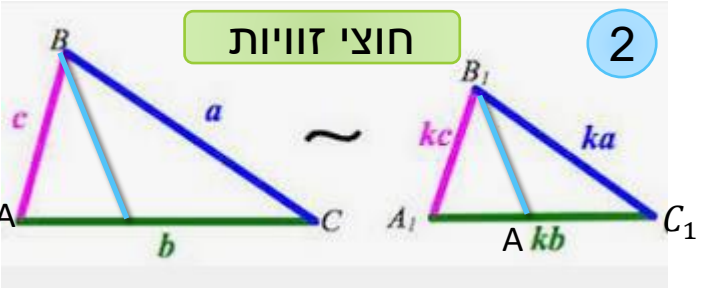
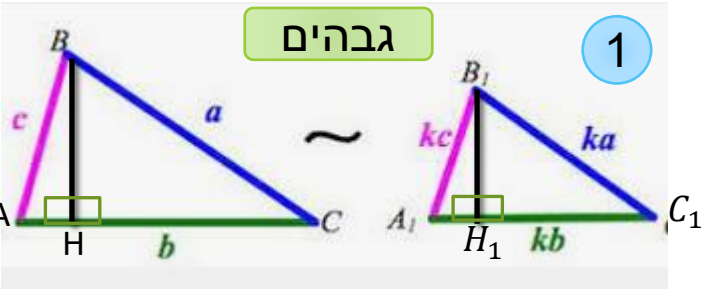


דמיון משולשים

$$\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta ABC$$

$$k = \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} = \frac{AC}{A_1 C_1}$$

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$$



נימוק	טענה	1
זוויות מתאימות במשולשים דומים	$\angle A = \angle A_1$	1
90°, גבהים	$\angle H = \angle H_1$	2
ד.ד.ד	$\Delta ABH \sim \Delta A_1 B_1 H_1$	5
פרופורציה של דמיון	$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BH}{B_1 H_1} = \frac{AH}{A_1 H_1} = k$	
5	$\frac{BH}{B_1 H_1} = k$	6

נימוק	טענה	3
זוויות מתאימות במשולשים דומים	$\angle A = \angle A_1$	1
צלעות פרופורציונליות במשולשים דומים, תיכונים	$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{2AM}{2A_1 M_1} = \frac{AM}{A_1 M_1}$	2
ד.ד.ד	$\Delta ABM \sim \Delta A_1 B_1 M_1$	5
פרופורציה של דמיון	$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BM}{B_1 M_1} = k$	

משפט על יחסי פרופורציה במשולשים דומים

במשולשים דומים גבהים, תיכונים, חוצי זוויות, רדיוסים של המעגל החוסם והחוסם והיקפים מתייחסים ביחס של צלעות, הטחים מתייחסים כריבוע של יחס הצלעות

משפט על יחסי פרופורציה
במשולשים דומים

במשולשים דומים,
גבהים, תיכונים,
חוצי זוויות,
רדיוסים של
המעגל החוסם
והחסום והיקפים
מתייחסים ביחס
של צלעות, הטחים
מתייחסים כריבוע
של יחס הצלעות

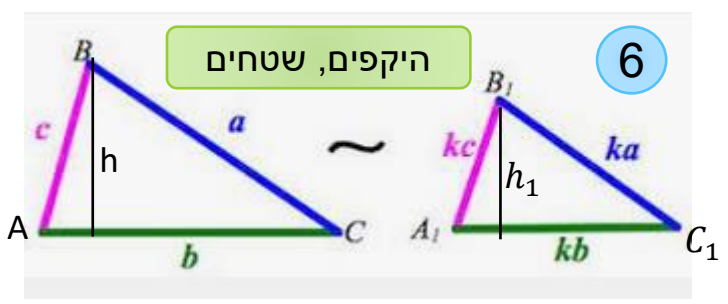
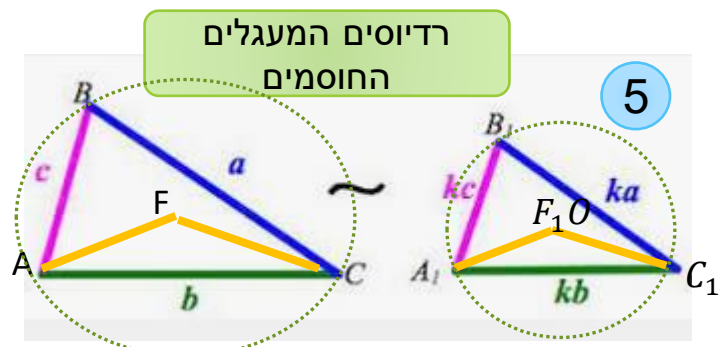
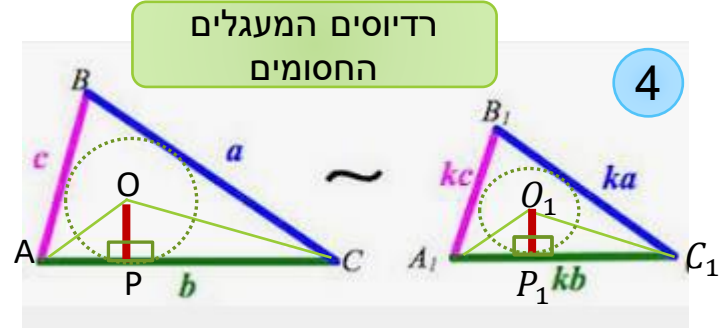
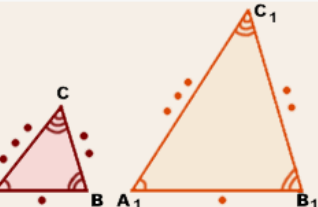
$$\frac{P_{\Delta A_1B_1C_1}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{ka+kb+kc}{a+b+c} = \frac{k(a+b+c)}{a+b+c} = k$$

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{bh}{2}}{\frac{kb \cdot kh}{2}} = k^2$$

דמיון משולשים

נימוק	טענה	4
זוויות מתאימות במשולשים דומים	$\angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1$	1
חוצי זוויות	$\angle \frac{1}{2}A = \angle \frac{1}{2}A_1, \angle \frac{1}{2}C = \angle \frac{1}{2}C_1$	2
ז.ז.ז	$\Delta AOC \sim \Delta A_1O_1C_1$	3
פרופורציה של דמיון	$\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{OC}{O_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$	4
ז.ז.ז, 2, רדיוס מאונך למשיק	$\Delta AOP \sim \Delta A_1O_1P_1$	5
פרופורציה של דמיון	$\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{OP}{O_1P_1} = k$	6
5	$\frac{OP}{O_1P_1} = k$	7

נימוק	טענה	5
זווית היקפית שווה למחצית מזווית המרכזית שנשענת על אותה קשת	$\angle AFC = 2\angle B, \angle A_1B_1C_1 = 2\angle B_1$	1
רדיוסים של אותו מעגל שווים זה לזה	$\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{FC}{F_1C_1}$	2
ז.צ.ז	$\Delta AFC \sim \Delta A_1F_1C_1$	3
פרופורציה של דמיון	$\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$	4
4	$\frac{AF}{A_1F_1} = k$	5



פרופורציה ודמיון במשולש ישר זווית

נימוק	טענה	
פרופורציה של דמיון, 5	$\frac{AH}{HB} = \frac{HB}{HC} = \frac{AB}{BC}$	8
כללי פרופורציה, 8	$HB^2 = AH \cdot HC$	9
פרופורציה של דמיון, 6	$\frac{AH}{AB} = \frac{HB}{BC} = \frac{AB}{AC}$	10
כללי פרופורציה, 10	$AB^2 = AH \cdot AC$	11
פרופורציה של דמיון, 7	$\frac{BH}{AB} = \frac{HC}{BC} = \frac{BC}{AC}$	12
. כללי פרופורציה, 12	$BC^2 = CH \cdot AC$	13
	מ.ש.ל.	

נתון: $\triangle ABC$

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$$BH \perp AC$$

צ.ל.:

$$\triangle AHB \sim \triangle BHC \text{ א.}$$

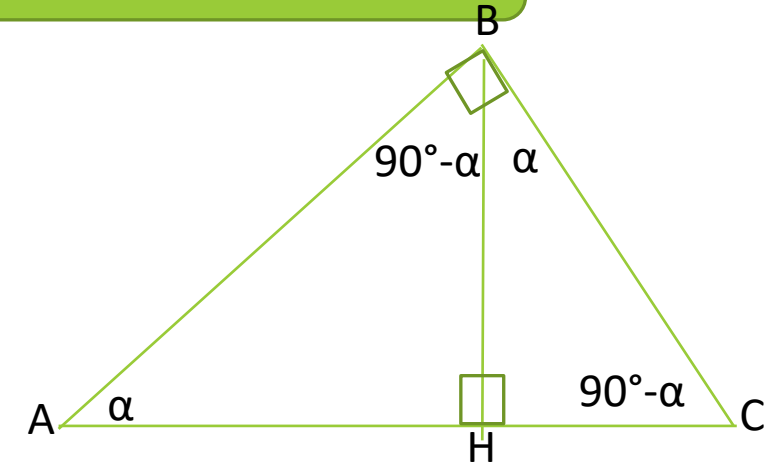
$$\triangle AHB \sim \triangle ABC \text{ ב.}$$

$$\triangle BHC \sim \triangle ABC \text{ ג.}$$

$$BH^2 = AH \cdot HC \text{ ד.}$$

$$AB^2 = AH \cdot AC \text{ ה.}$$

$$BC^2 = CH \cdot AC \text{ ו.}$$

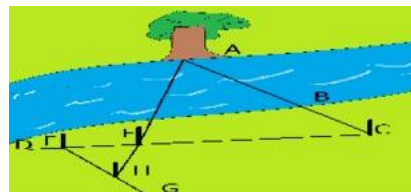
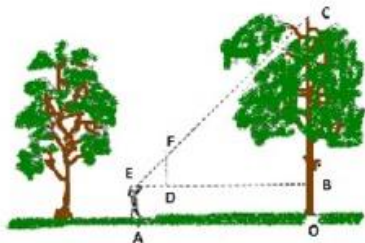
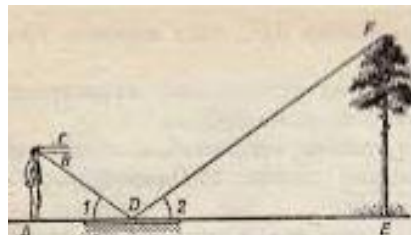
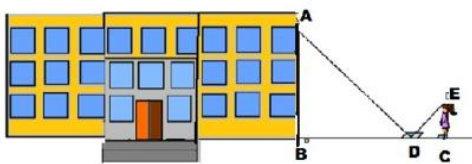


משפט:

במשולש ישר זווית מתקיים:

- ❖ גובה ליתר מחלק אותו לשני משולשים דומים שכל אחד מהם דומה למשולש המקורי
- ❖ גובה ליתר הוא ממוצע הנדסי בין ההיטלים של הניצבים על היתר
- ❖ כל אחד מהניצבים הוא ממוצע הנדסי בין היתרב והיטלו על היתר.

נימוק	טענה	
	נסמן $\angle A = \alpha$	1
סכום זוויות ב $\triangle ABH$	$\angle ABH = 90^\circ - \alpha$	2
נתון, 2	$\angle CBH = \alpha$	3
סכום זוויות ב $\triangle CBH$	$\angle C = 90^\circ - \alpha$	4
ז.ז. 1-4	$\triangle AHB \sim \triangle BHC$	5
ז.ז. $90^\circ, \alpha$	$\triangle AHB \sim \triangle ABC$	6
ז.ז. $90^\circ, \alpha$	$\triangle BHC \sim \triangle ABC$	7

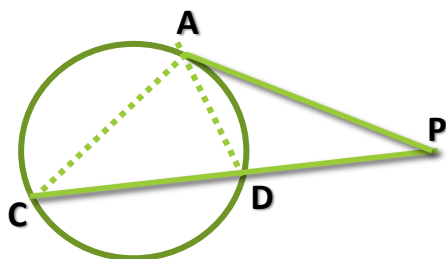


פרופורציה ודמיון במעגל

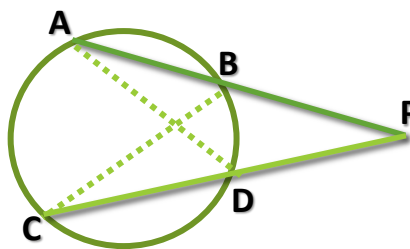
משפט: אם משיק וחותר של המעגל (המשך של המיתר) נחתכים מחוץ למעגל אז המכפלה של החותר בחלק החיצוני שלו שווה לריבוע של משיק.

משפט: אם שני חותכים של המעגל (המשכי של שני מיתרים) נחתכים מחוץ למעגל אז המכפלה של חותר אחד בחלק החיצוני שלו שווה למכפלה של החותר השני בחלק החיצוני שלו.

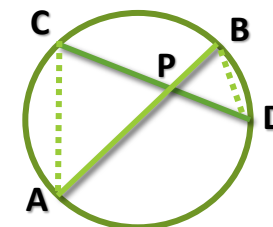
משפט: אם שני מיתרים נחתכים בתוך המעגל אז נקודת החיתוך שלהם מחלקת אותם כך שמכפלת החלקים של אחד מהם שווה למכפלת החלקים של השני.



נתון: מעגל O
משיק AP, מיתר CD
 $P = AP \cap CD$
צ.ל:
 $AP^2 = CP \cdot PD$



נתון: מעגל O
מיתרים AB, CD
 $P = AB \cap CD$
צ.ל:
 $AP \cdot PB = CP \cdot PD$



נתון: מעגל O
מיתרים AB, CD
 $P = AB \cap CD$
צ.ל:
 $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

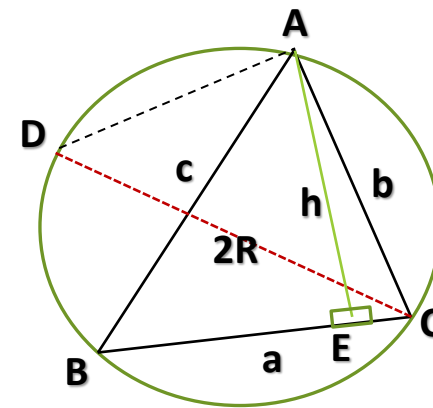
נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיצרים AC ו-AD	1
זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית שנשענת על אותה קשת $\widehat{AD}$	$\angle PAD = \angle C$	2
ז.ז., זווית משותפת $\angle P$, 2	$\triangle CPA \sim \triangle APD$	3
פרופורציה של דמיון	$\frac{CP}{AP} = \frac{PA}{PD} = \frac{CA}{AD}$	4
כללי פרופורציה, 4	$AP \cdot PA = CP \cdot PD$	5
5	$AP^2 = CP \cdot PD$	6

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיצרים BC ו-AD	1
זווית היקפיות על אותה קשת $\widehat{BD}$	$\angle A = \angle C$	2
ז.ז., זווית משותפת $\angle P$, 2	$\triangle APD \sim \triangle CPB$	3
פרופורציה של דמיון	$\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{CB}$	4
כללי פרופורציה, 4	$AP \cdot PB = CP \cdot PD$	5

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיצרים BD ו-AC	1
זווית היקפיות על אותה קשת $\widehat{BC}$	$\angle A = \angle D$	2
זווית היקפיות על אותה קשת $\widehat{AD}$	$\angle C = \angle B$	3
ז.ז. 1, 2	$\triangle ACP \sim \triangle DBP$	4
פרופורציה של דמיון	$\frac{AC}{DB} = \frac{CP}{BP} = \frac{AP}{DP}$	5
כללי פרופורציה, 6	$AP \cdot PB = CP \cdot PD$	6

תרגיל לדוגמא

בני גורן, עמ' 306,
ת. 23



נתון: מעגל O
 $\triangle ABC$ חסום במעגל
 $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
 CD קוטר המעגל
 $AE = h$ גובה לצלע BC

צ.ל.:

א. $\triangle ABE \sim \triangle CDA$

ב. $\frac{h}{b} = \frac{c}{2R}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

נימוק	טענה	
זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת $\widehat{AC}$	$\angle B = \angle D$	1
זווית היקפית שנשענת על הקוטר	$\angle DAC = 90^\circ$	2
AE גובה	$\angle AEC = 90^\circ$	3
1-3, ז.ז.	$\triangle ABE \sim \triangle CDA$	5
פרופורציה של דמיון	$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DA} = \frac{AE}{CA}$	6
נתון, 6	$\frac{c}{2R} = \frac{h}{b}$	7
כללי פרופורציה, 7	$h = \frac{cb}{2R}$	8
שטח משולש	$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2}$	9
הצבה של 8 ל 9	$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$	10
	מ.ש.ל.	10

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$S_{\triangle ABC} = pr$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(p-b)(p)(p-a)(p-c)}$$

כאן:

$S_{\triangle ABC}$ המשולש שטח

a, b, c צלעות המשולש

h_a גובה לצלע a

R רדיוס המעגל החוסם את המשולש

r רדיוס המעגל החסום במשולש

p חצי היקף המשולש

ש"ב בני גורן

עמ' 284, ת. 6, עמ' 285, ת. 9, 10, עמ' 288, ת. 20,
21, 22, עמ' 289, ת. 23, 24, 25, 26, עמ' 290, ת.

27, 28, 29, 30

עמ' 291, ת. 31

עמ' 294, ת. 41, 42, עמ' 296, ת. 48,

עמ' 300, ת. 61, 62, 63

עמ' 302, ת. 7, 8

עמ' 303, ת' 9, 10, 11, 12,

עמ' 304, ת. 13

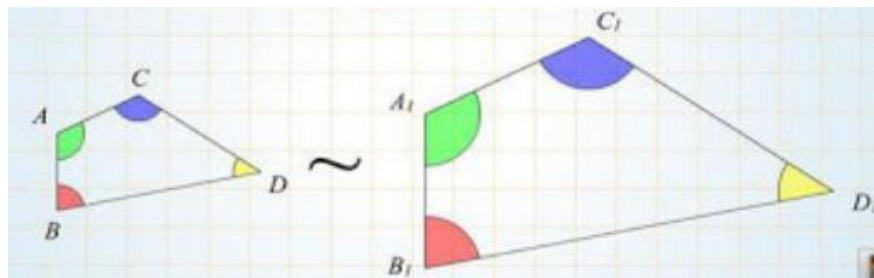
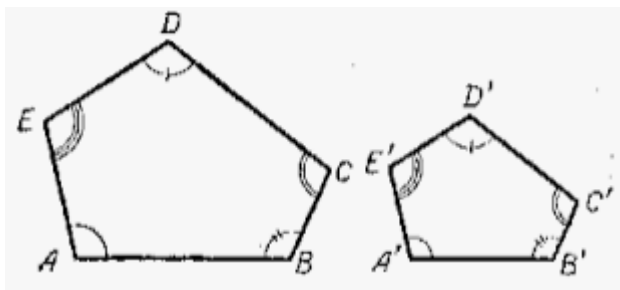
גיאומטריה

מכינה 2025
יחידה עשירית
(שיעורים 28-29-30)

דמיון משולשים



דמיון מצולעים



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = k$$

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \angle D = \angle D_1$$

$$\Downarrow$$

$$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$$



$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

הגדרה: שני מצולעים הם מצולעים דומים אם כל הזוויות שמצולע אחד שוות לכול הזוויות של המצולע השני וכל הצלעות שלהם פרופורציונליות בהתאמה

הגדרה: שני משולשים הם משולשים דומים אם שלוש זוויות של משולש אחד שוות לשלוש זוויות של המשולש השני וכל הצלעות שלהם פרופורציונליות בהתאמה

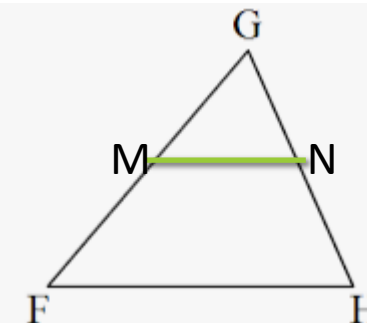




משפטי דמיון

למא (משפט עזר)

אם בתוך המשולש
מעבירים ישר מקביל
לאחת הצלעות אז
המשולש שנוצר דומה
למשולש המקורי



נתון: $\triangle FGH$
 $MN \parallel FH$
צ.ל. $\triangle FGH \sim \triangle MGN$

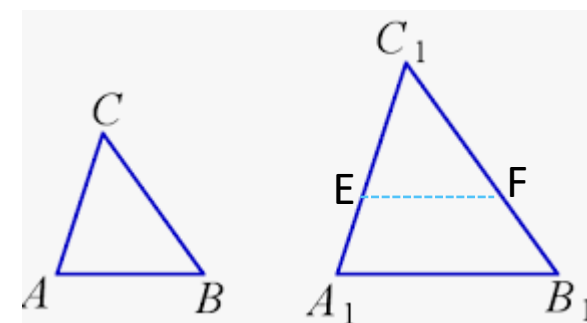
נימוק	טענה	
על פי החבה הראשונה של משפט תאלס ($\angle G, MN \parallel FH$)	$\frac{MG}{FG} = \frac{NG}{HG} = \frac{MN}{FH}$	1
זוויות מתאימות ($\angle F, MN \parallel FH$, ק"ח FG)	$\angle GMN = \angle F$	2
זוויות מתאימות ($\angle H, MN \parallel FH$, ק"ח HG)	$\angle GNM = \angle H$	3
משותפת	$\angle G$	4
על פי ההגדרה, 1-4	$\triangle FGH \sim \triangle MGN$	5
	מ.ש.ל.	



משפטי דמיון

משפט דמיון הראשון

אם שתי זוויות במשולש שוות לשתי זוויות במשולש אחר אז המשולשים דומים



נתון: $\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$
 $\angle A = \angle A_1$
 $\angle B = \angle B_1$
 צ.ל. $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

טענה	נימוק
1 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$	סכום זוויות במשולש (ΔABC)
2 $\angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1$	סכום זוויות במשולש ($\Delta A_1B_1C_1$)
3 $\angle C = \angle C_1$	על פי 1, 2, נתון
8 $\Delta EC_1F \sim \Delta A_1C_1B_1$	על פי משפט למא, 7
	נחפוף ΔEC_1F ו- ΔACB
9 $\angle A_1 = \angle FEC_1$	זוויות מתאימות ($EF \parallel A_1B_1$ או $A_1B_1 \parallel EF$, ק"ח A_1C_1)
10 $\angle A = \angle A_1$	נתון
11 $\angle A = \angle FEC_1$	9, 10
12 $EC_1 = AC$	6
13 $\angle C = \angle C_1$	3
14 $\Delta ACB \cong \Delta EC_1F$	ז.צ.ז., 11-13
15 $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$	8, 14 למשולשים חופפים כל הצלעות וכל הזוויות שוות בהתאמה
	מ.ש.ל.

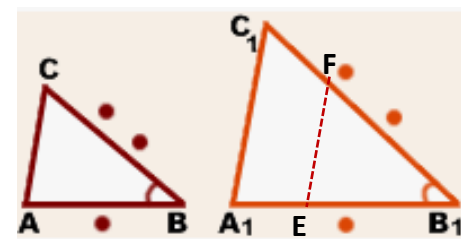
4. נתבונן בקטעים AC ו- A_1C_1 .
 קיימות שלוש אפשרויות:
 א. $A_1C_1 = AC$
 אם כך אז $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta ABC$ על פי זווית (3), צלע (א) זווית (נתון)
 לכן $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$
 ב. $A_1C_1 > AC$
 ג. $A_1C_1 < AC$
5. נניח בלי הגבלת הכלליות ש $A_1C_1 > AC$
6. אם כך אז בתוך הקטע A_1C_1 קיימת נקודה E כך ש $EC_1 = AC$
7. נעביר דרך נקודה E קטע $EF \parallel A_1B_1$



משפטי דמיון

משפט דמיון השני

אם שתי צלעות של משולש אחד פרופורציונליות לשתי צלעות של משולש אחר והזוויות בין הצלעות האלה בשני המשולשים שוות זו לזו אז המשולשים דומים



נתון: ΔABC , $\Delta A_1B_1C_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

$$\angle B = \angle B_1$$

צ.ל. $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

נימוק	טענה	
על פי משפט למא (EF ו- A_1C_1)	$\Delta EB_1F \sim \Delta A_1B_1C_1$	5
על פי משפט תאלס מורחב ($\angle B_1$, EF ו- A_1C_1)	$\frac{EB_1}{A_1B_1} = \frac{FB_1}{B_1C_1}$	6
נתון	$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$	7
6, 7, 3, כללי פרופורציה (אם שלושה איברים של פרופורציה שווים אז גם הרביעי שווה)	$FB_1 = BC$	8
	נחפוף ΔEB_1F ו- ΔABC	
3	$EB_1 = AB$	9
נתון	$\angle B = \angle B_1$	10
8	$FB_1 = BC$	11
11-13, ז.צ.ז.	$\Delta ABC \cong \Delta EB_1F$	14
5, 14 למשולשים חופפים כל הצלעות וכל הזוויות שוות בהתאמה	$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$	15
	מ.ש.ל.	

1. נתבונן בקטעים AB ו- A_1B_1 .

קיימות שלוש אפשרויות:

א. $A_1B_1 = AB$

אם כך אז $\frac{AB}{A_1B_1} = 1$, על פי הנתון

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ לכן } \frac{BC}{B_1C_1} = 1 \text{ לכן } B_1C_1 = BC$$

$\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta ABC$ על פי צלע, זווית, צלע

לכן $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

ב. $A_1B_1 > AB$

ג. $A_1B_1 < AB$

2. נניח בלי הגבלת הכלליות ש

$$A_1B_1 > AB$$

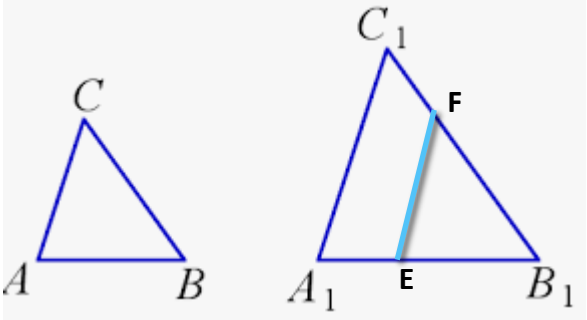
3. אם כך אז בתוך הקטע A_1B_1

קיימת נקודה E כך ש- $EB_1 = BA$

4. נעביר דרך נקודה E קטע EF ו- A_1C_1

משפט דמיון השלישי

אם שלוש צלעות של משולש אחד פרופורציונליות לשלוש צלעות של משולש אחר אז המשולשים דומים



נתון: $\Delta A_1B_1C_1, \Delta ABC$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

צ.ל. $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

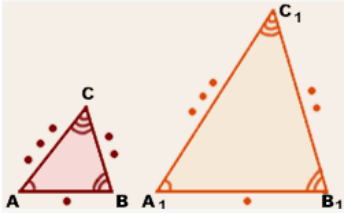
משפטי דמיון

טענה	נימוק
5 $\Delta EBF \sim \Delta A_1B_1C_1$	על פי משפט למא ($A_1C_1 \parallel EF$)
6 $\frac{EB_1}{A_1B_1} = \frac{FB_1}{B_1C_1} = \frac{EF}{A_1C_1}$	על פי משפט תאלס מורחב ($A_1C_1 \parallel EF, B_1$)
7 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$	נתון
8 $FB_1=BC$ $EF=AC$	3,6,7 כללי פרופורציה (אם שלושה איברים של פרופורציה שווים אז גם הרביעי שווה)
9 $\Delta ABC \cong \Delta EBF$	צ.צ.צ., 3,8
10 $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$	5,9 למשולשים חופפים כל הצלעות וכל הזוויות שוות בהתאמה
	מ.ש.ל.

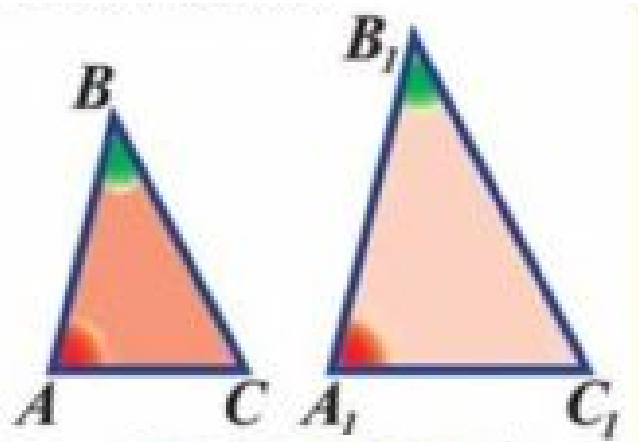


- נתבונן בקטעים AB ו A_1B_1 . קיימות שלוש אפשרויות:
א. $A_1B_1 = AB$
אם כך אז $\frac{AB}{A_1B_1} = 1$, על פי הנתון $\frac{AC}{A_1C_1} = 1$ לכן $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$
לכן $A_1C_1=AC, B_1C_1 = BC$
 $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta ABC$ על פי צלע, צלע, צלע
לכן $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$
ב. $A_1B_1 > AB$
ג. $A_1B_1 < AB$
- נניח בלי הגבלת הכלליות ש $A_1B_1 > AB$
- אם כך אז בתוך הקטע A_1B_1 קיימת נקודה E כך ש $EB_1 = BA$
- נעביר דרך נקודה E קטע $EF \parallel A_1C_1$

סיכום דמיון משולשים



משפט דמיון הראשון



$$\angle A = \angle A_1$$

$$\angle B = \angle B_1$$

משפט דמיון ראשון – ז"ז

אם שתי זוויות במשולש אחד שוות בהתאמה לשתי זוויות במשולש שני, אז המשולשים דומים.

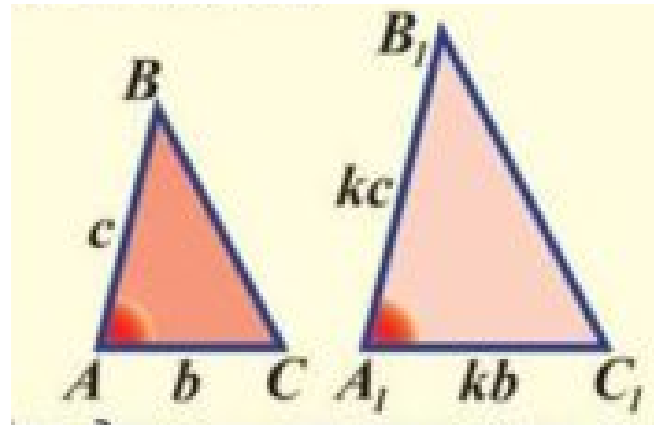
משפט דמיון שני – צ"צ

אם שני משולשים שווים בזווית אחת ושתי הצלעות הכולאות את הזווית במשולש אחד מתייחסות באותו יחס לשתי הצלעות הכולאות את הזווית במשולש השני, אז המשולשים דומים.

משפט דמיון שלישי – צ"צ

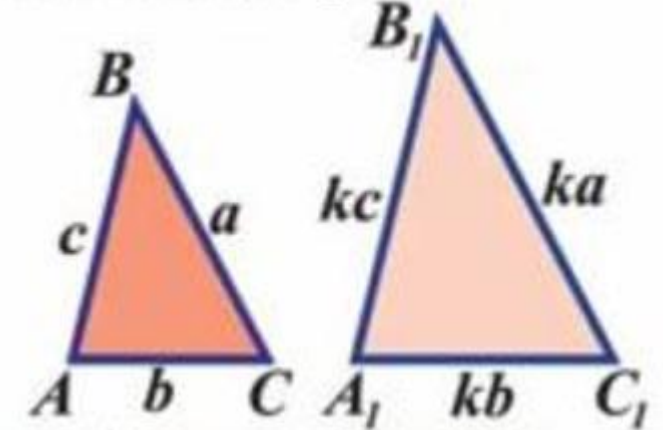
אם שלוש צלעות של משולש אחד מתייחסות באותו יחס לשלוש צלעות של משולש שני, אז המשולשים דומים.

משפט דמיון השני



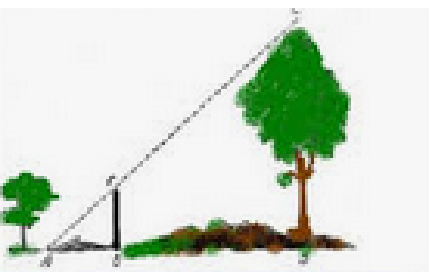
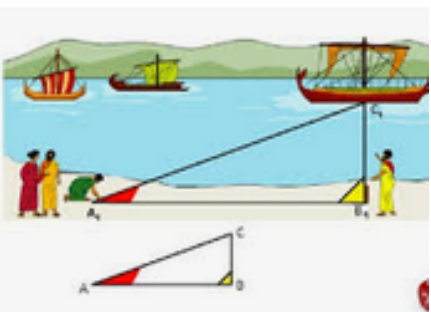
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k; \angle A = \angle A_1$$

משפט דמיון השלישי



$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$$

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$$

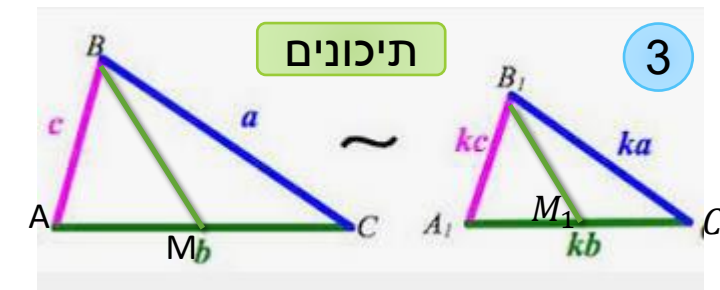
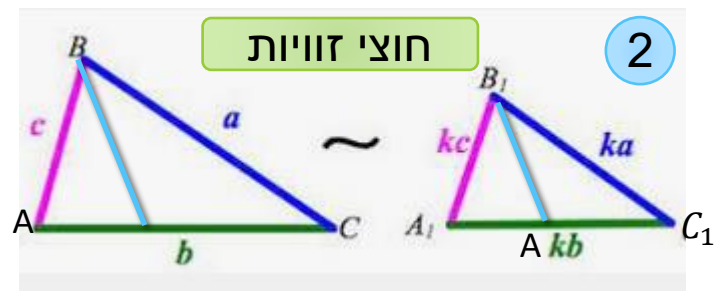
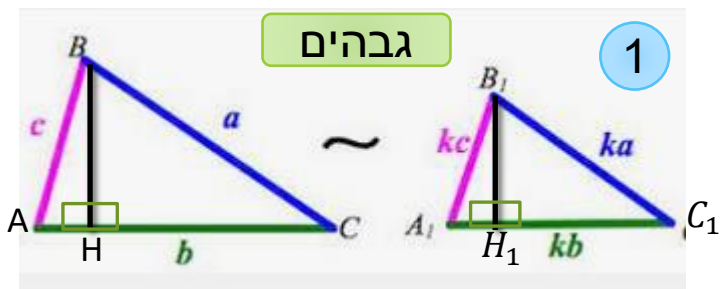


דמיון משולשים

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$$

$$k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$$

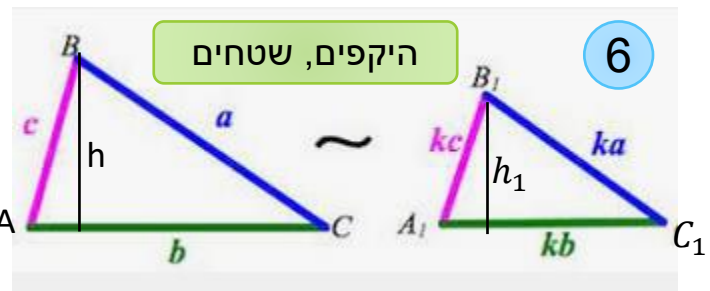
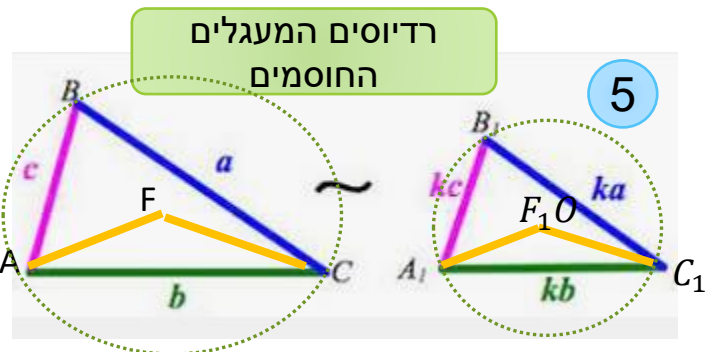
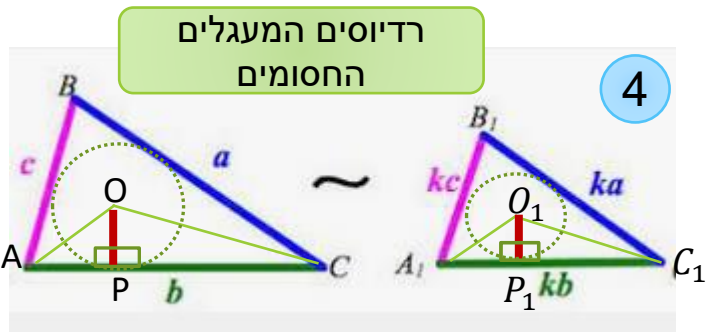
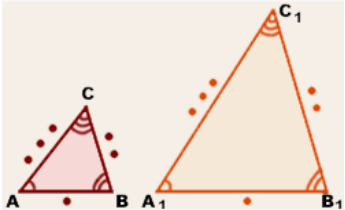


נימוק	טענה	1
זוויות מתאימות במשולשים דומים	$\angle A = \angle A_1$	1
90°, גבהים	$\angle H = \angle H_1$	2
ד.ד.ד	$\Delta ABH \sim \Delta A_1B_1H_1$	5
פרופורציה של דמיון	$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AH}{A_1H_1} = k$	
5	$\frac{BH}{B_1H_1} = k$	6

נימוק	טענה	3
זוויות מתאימות במשולשים דומים	$\angle A = \angle A_1$	1
צלעות פרופורציונליות במשולשים דומים, תיכונים	$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{2AM}{2A_1M_1} = \frac{AM}{A_1M_1} = k$	2
ד.ד.ד	$\Delta ABM \sim \Delta A_1B_1M_1$	5
פרופורציה של דמיון	$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1} = k$	

משפט על יחסי
פרופורציה
במשולשים
דומים

במשולשים
דומים גבהים,
תיכונים, חוצי
זוויות, רדיוסים
של המעגל
החוסם
והחוסם
והיקפים
מתייחסים
ביחס של
צלעות, הטחים
מתייחסים
כריבוע של יחס
הצלעות



דמיון משולשים

משפט על יחסי פרופורציה
במשולשים דומים

במשולשים דומים,
גבהים, תיכונים,
חוצי זוויות,
רדיוסים של
המעגל החוסם
והחוסם והיקפים
מתייחסים ביחס
של צלעות, הטחים
מתייחסים כריבוע
של יחס הצלעות

נימוק	טענה	4
זוויות מתאימות במשולשים דומים	$\angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1$	1
חוצי זוויות	$\angle \frac{1}{2}A = \angle \frac{1}{2}A_1, \angle \frac{1}{2}C = \angle \frac{1}{2}C_1$	2
ז.ז.ז	$\Delta AOC \sim \Delta A_1O_1C_1$	3
פרופורציה של דמיון	$\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{OC}{O_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$	4
ז.ז.ז, 2, רדיוס מאונך למשיק	$\Delta AOP \sim \Delta A_1O_1P_1$	5
פרופורציה של דמיון	$\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{OP}{O_1P_1} = k$	6
5	$\frac{OP}{O_1P_1} = k$	7

נימוק	טענה	5
זווית היקפית שווה למחצית מזווית המרכזית שנשענת על אותה קשת	$\angle AFC = 2\angle B, \angle A_1B_1C_1 = 2\angle B_1$	1
רדיוסים של אותו מעגל שווים זה לזה	$\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{FC}{F_1C_1}$	2
ז.צ.ז	$\Delta AFC \sim \Delta A_1F_1C_1$	3
פרופורציה של דמיון	$\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$	4
4	$\frac{AF}{A_1F_1} = k$	5

6

$$\frac{P_{\Delta A_1B_1C_1}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{ka+kb+kc}{a+b+c} = \frac{k(a+b+c)}{a+b+c} = k$$

6

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{bh}{2}}{\frac{kb \cdot kh}{2}} = k^2$$

פרופורציה ודמיון במשולש ישר זווית

נימוק	טענה	
פרופורציה של דמיון, 5	$\frac{AH}{HB} = \frac{HB}{HC} = \frac{AB}{BC}$	8
כללי פרופורציה, 8	$HB^2 = AH \cdot HC$	9
פרופורציה של דמיון, 6	$\frac{AH}{AB} = \frac{HB}{BC} = \frac{AB}{AC}$	10
כללי פרופורציה, 10	$AB^2 = AH \cdot AC$	11
פרופורציה של דמיון, 7	$\frac{BH}{AB} = \frac{HC}{BC} = \frac{BC}{AC}$	12
. כללי פרופורציה, 12	$BC^2 = CH \cdot AC$	13
	מ.ש.ל.	

נתון: $\triangle ABC$

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$$BH \perp AC$$

צ.ל.:

$$\triangle AHB \sim \triangle BHC \text{ א.}$$

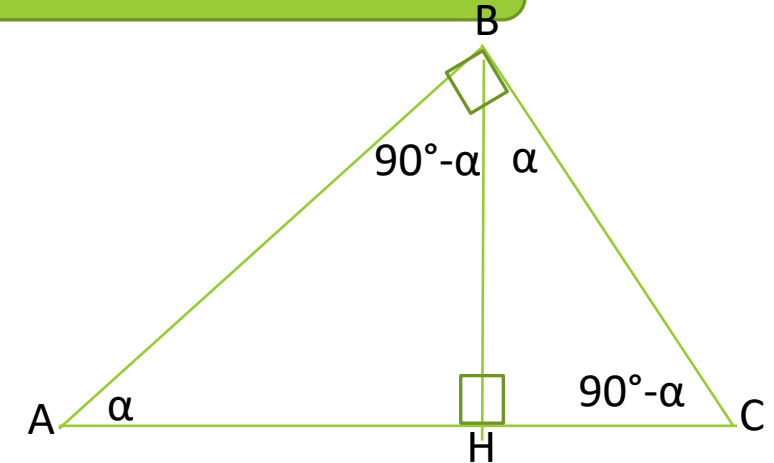
$$\triangle AHB \sim \triangle ABC \text{ ב.}$$

$$\triangle BHC \sim \triangle ABC \text{ ג.}$$

$$BH^2 = AH \cdot HC \text{ ד.}$$

$$AB^2 = AH \cdot AC \text{ ה.}$$

$$BC^2 = CH \cdot AC \text{ ו.}$$

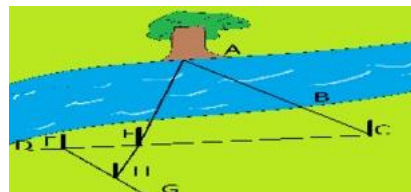
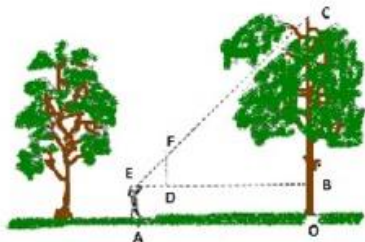
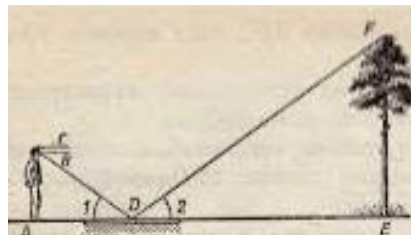
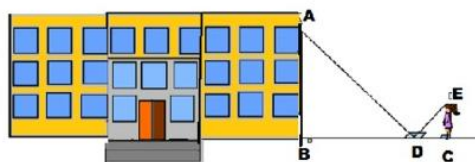


משפט:

במשולש ישר זווית מתקיים:

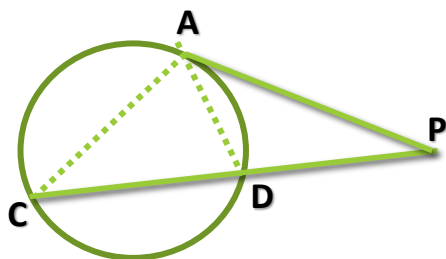
- ❖ גובה ליתר מחלק אותו לשני משולשים דומים שכל אחד מהם דומה למשולש המקורי
- ❖ גובה ליתר הוא ממוצע הנדסי בין ההיטלים של הניצבים על היתר
- ❖ כל אחד מהניצבים הוא ממוצע הנדסי בין היתרב והיטלו על היתר.

נימוק	טענה	
	נסמן $\angle A = \alpha$	1
סכום זוויות ב $\triangle ABH$	$\angle ABH = 90^\circ - \alpha$	2
נתון, 2	$\angle CBH = \alpha$	3
סכום זוויות ב $\triangle CBH$	$\angle C = 90^\circ - \alpha$	4
1-4 ז.ז.	$\triangle AHB \sim \triangle BHC$	5
ז.ז. $90^\circ, \alpha$.	$\triangle AHB \sim \triangle ABC$	6
ז.ז. $90^\circ, \alpha$.	$\triangle BHC \sim \triangle ABC$	7



פרופורציה ודמיון במעגל

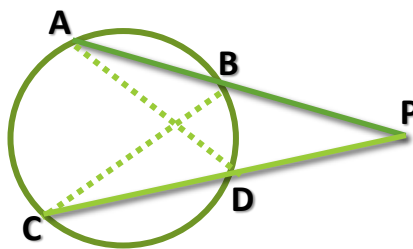
משפט: אם משיק וחותר של המעגל (המשך של המיתר) נחתכים מחוץ למעגל אז המכפלה של החותר בחלק החיצוני שלו שווה לריבוע של משיק.



נתון: מעגל O
משיק CD, AP מיתר
 $P = AP \cap CD$
צ.ל:
 $AP^2 = CP \cdot PD$

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיצרים AC ו-AD	1
זווית בין משיק למיתר שווה לזווית היקפית שנשענת על אותה קשת $\widehat{AD}$	$\angle PAD = \angle C$	2
ז.ז., זווית משותפת $\angle P$, 2	$\triangle CPA \sim \triangle APD$	3
פרופורציה של דמיון	$\frac{CP}{AP} = \frac{PA}{PD} = \frac{CA}{AD}$	4
כללי פרופורציה, 4	$AP \cdot PA = CP \cdot PD$	5
5	$AP^2 = CP \cdot PD$	6

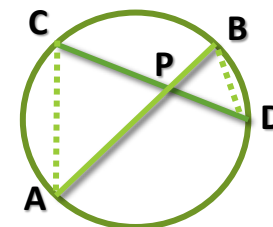
משפט: אם שני חותכים של המעגל (המשכי של שני מיתרים) נחתכים מחוץ למעגל אז המכפלה של חותר אחד בחלק החיצוני שלו שווה למכפלה של החותר השני בחלק החיצוני שלו.



נתון: מעגל O
מיתרים CD, AB
 $P = AB \cap CD$
צ.ל:
 $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיצרים BC ו-AD	1
זווית היקפיות על אותה קשת $\widehat{BD}$	$\angle A = \angle C$	2
ז.ז., זווית משותפת $\angle P$, 2	$\triangle APD \sim \triangle CPB$	3
פרופורציה של דמיון	$\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{CB}$	4
כללי פרופורציה, 4	$AP \cdot PB = CP \cdot PD$	5

משפט: אם שני מיתרים נחתכים בתוך המעגל אז נקודת החיתוך שלהם מחלקת אותם כך שמכפלת החלקים של אחד מהם שווה למכפלת החלקים של השני.

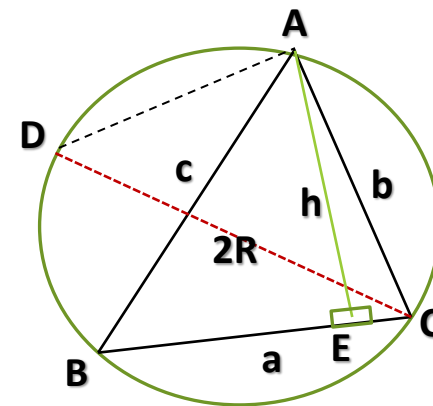


נתון: מעגל O
מיתרים CD, AB
 $P = AB \cap CD$
צ.ל:
 $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

נימוק	טענה	
ב"ע	נעביר מיצרים AC ו-BD	1
זווית היקפיות על אותה קשת $\widehat{BC}$	$\angle A = \angle D$	2
זווית היקפיות על אותה קשת $\widehat{AD}$	$\angle C = \angle B$	3
ז.ז., 1, 2	$\triangle ACP \sim \triangle DBP$	4
פרופורציה של דמיון	$\frac{AC}{DB} = \frac{CP}{BP} = \frac{AP}{DP}$	5
כללי פרופורציה, 6	$AP \cdot PB = CP \cdot PD$	6

תרגיל לדוגמא

בני גורן, עמ' 306,
ת. 23



נתון: מעגל O
 $\triangle ABC$ חסום במעגל
 $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
 CD קוטר המעגל
 $AE = h$ גובה לצלע BC

צ.ל.:

א. $\triangle ABE \sim \triangle CDA$

ב. $\frac{h}{b} = \frac{c}{2R}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

נימוק	טענה	
זוויות היקפיות שנשענות על אותה קשת $\widehat{AC}$	$\angle B = \angle D$	1
זווית היקפית שנשענת על הקוטר	$\angle DAC = 90^\circ$	2
AE גובה	$\angle AEC = 90^\circ$	3
1-3, ז.ז.	$\triangle ABE \sim \triangle CDA$	5
פרופורציה של דמיון	$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DA} = \frac{AE}{CA}$	6
נתון, 6	$\frac{c}{2R} = \frac{h}{b}$	7
כללי פרופורציה, 7	$h = \frac{cb}{2R}$	8
שטח משולש	$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2}$	9
הצבה של 8 ל 9	$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$	10
	מ.ש.ל.	10

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$S_{\triangle ABC} = pr$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(p-b)(p)(p-a)(p-c)}$$

כאן:

$S_{\triangle ABC}$ המשולש שטח ABC

a, b, c צלעות המשולש

h_a גובה לצלע a

R רדיוס המעגל החוסם את המשולש

r רדיוס המעגל החסום במשולש

p חצי היקף המשולש