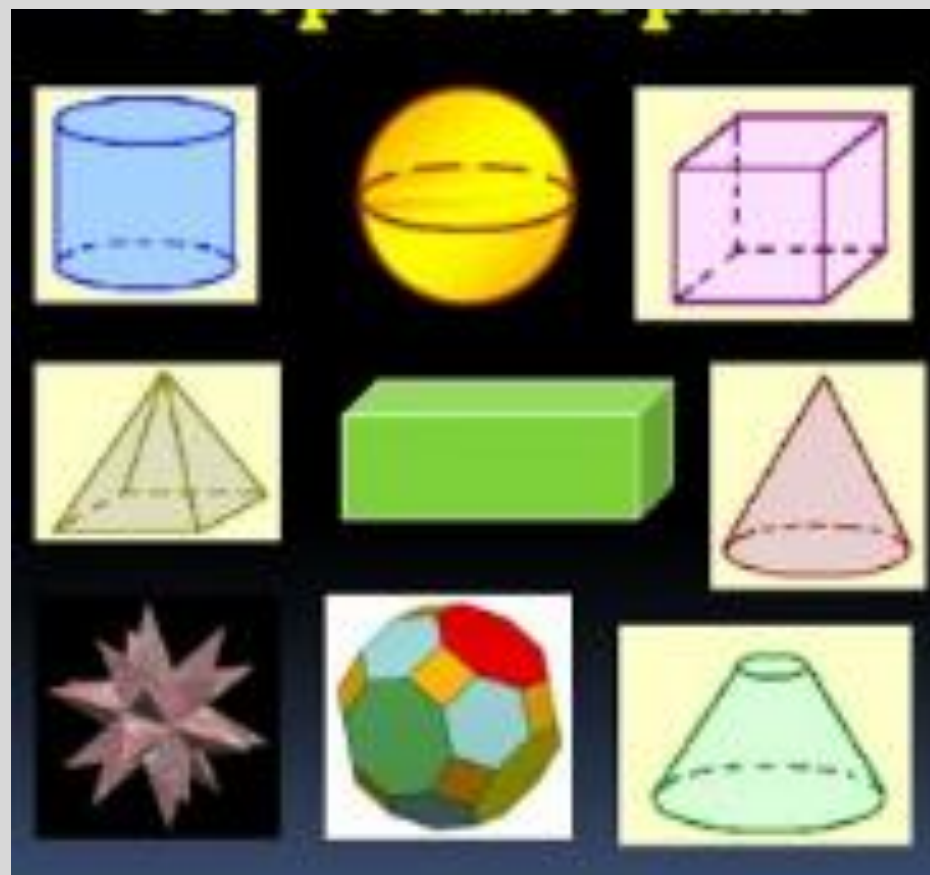


הנדסת המרחב

תשפ"ד



ד"ר נלי קלר

אבודים במרחב?

גיאומטריה של המרחב מאת נלי קלר



סימונים מתמטיים

נקודות : $A, B, \dots, M, P, Q, \dots$

ישרים : $a, b, \dots, m, p, q, \dots$ או AB – ישר העובר דרך הנקודות A ו- B

מישורים : $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

(ABC) : המישור העובר דרך הנקודות A, B, C כלומר מישור ABC

$(a; A)$: מישור העובר דרך הנקודה A והישר a

$a \wedge b$: זווית בין הישרים a ו- b

$a \wedge \alpha$: זווית בין הישר a למישור α

$\alpha \wedge \beta$: זווית בין המישורים α, β

$\equiv$ חפיפה

$\sim$ דמיון

$\parallel$ הקבלה

$\perp$ ניצבות

$\in$ שייכות של איבר לקבוצה ($\notin$ האיבר אינו שייך לקבוצה)

$\subset$ שייכות של קבוצה לקבוצה (תת קבוצה) ($\not\subset$ אין שייכות)

$\cap$ חיתוך

$\cup$ איחוד

$\Rightarrow, \Leftarrow$ מכאן נובע

$\Leftrightarrow$ אם ורק אם (א"א) – הטענה מתקיימת בשני הכיוונים

$\exists$ קיים ($\nexists$ לא קיים)

: כך שמתקיים, צד שמאל של הנקודתיים מקיים את התנאי שמימין לנקודתיים

$\models$ מקביל ושווה

מבוא

גיאומטריה אוקלידית במרחב היא הרחבה של גיאומטריה אוקלידית במישור. מערכת האקסיומות של המרחב משלימה את האקסיומות של הגיאומטריה האוקלידית במישור על ידי האקסיומות הבאות:

אקסיומה 1

במרחב קיימים מישורים. בכל מישור במרחב מתקיימות כל האקסיומות של הגיאומטריה האוקלידית. * האקסיומה מאפשרת שימוש במרחב בכל המשפטים שהוכחנו בגיאומטריה של המישור.

אקסיומה 2

דרך כל שלוש נקודות שאינן נמצאות על ישר אחד עובר מישור אחד ויחיד. * האקסיומה טוענת ששלוש נקודות מגדירות מישור חד משמעית.

אקסיומה 3

עבור כל מישור, קיימות נקודות השייכות למישור זה וקיימות נקודות שאינן שייכות למישור זה.

אקסיומה 4

אם ישר עובר דרך שתי נקודות במישור, אזי כל הישר נמצא (מוכל) במישור. * האקסיומה טוענת: מספיק לדעת ששתי נקודות של הישר שייכות למישור, כדי לדעת שכל הנקודות של הישר שייכות לאותו מישור.

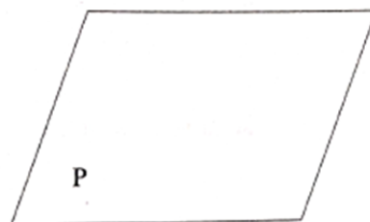
אקסיומה 5

כל מישור מחלק את קבוצת הנקודות במרחב, שאינן שייכות לו, לשתי קבוצות, באופן הבא: אם שתי נקודות נמצאות באותה קבוצה, אזי הקטע המחבר ביניהן אינו חותך את המישור. אם שתי נקודות נמצאות בקבוצות שונות, אזי הקטע המחבר ביניהן חותך את המישור.

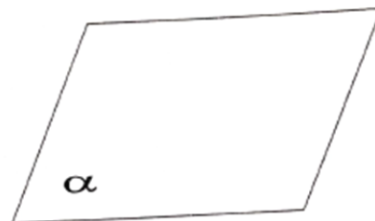


מצב הדדי בין חלקי מרחב, סימונים וסרטוטים

1. מישור: נהוג לסמן מישור עי"י אותיות יווניות קטנות, או עי"י אותיות לועזיות גדולות. כל מישור הוא אינסופי בכל הכיוונים, לכן הקווים המגבילים אותו הם סמליים.



מישור P



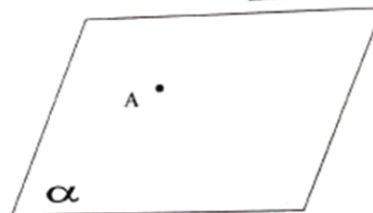
מישור α

2. נקודה ומישור:

B



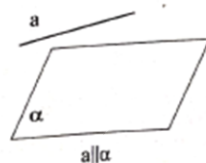
הנקודה B אינה שייכת למישור α
סימון: $B \notin \alpha$



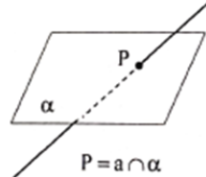
הנקודה A שייכת למישור α
סימון: $A \in \alpha$

3. ישר ומישור:

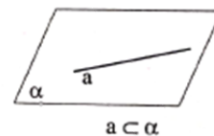
נהוג לסמן ישר עי"י אות לועזית קטנה, או עי"י שתי אותיות לועזיות גדולות, של נקודות השייכות לישר.



$a \parallel \alpha$
הישר a מקביל למישור α
לישר ולמישור אין נקודות משותפות.



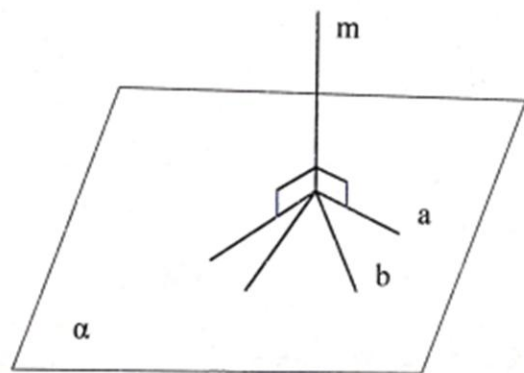
$P = a \cap \alpha$
הישר a חותך את המישור α בנקודה P
לישר ולמישור יש נקודה משותפת אחת בלבד.



$a \subset \alpha$
הישר מוכל במישור
לישר ולמישור יש יותר מנקודה אחת משותפת ולכן עי"פ אקסיומה 4 כל הנקודות של הישר שייכות למישור.

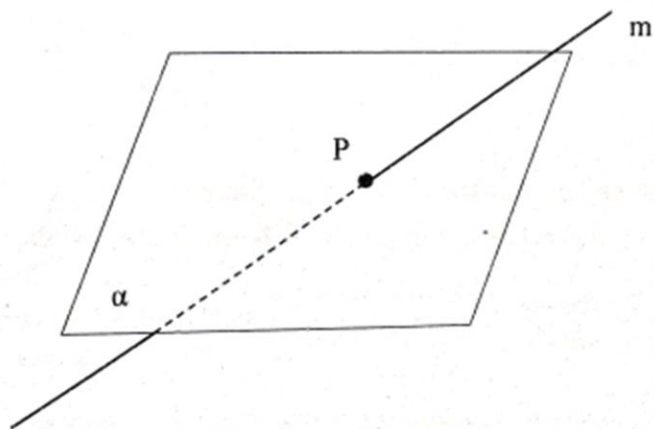
ישר החותך מישור

1. ישר מאונך למישור הוא ישר החותך מישור ומאונך לכל ישר במישור.



$$m \perp a, b, \dots \Leftarrow m \perp \alpha$$

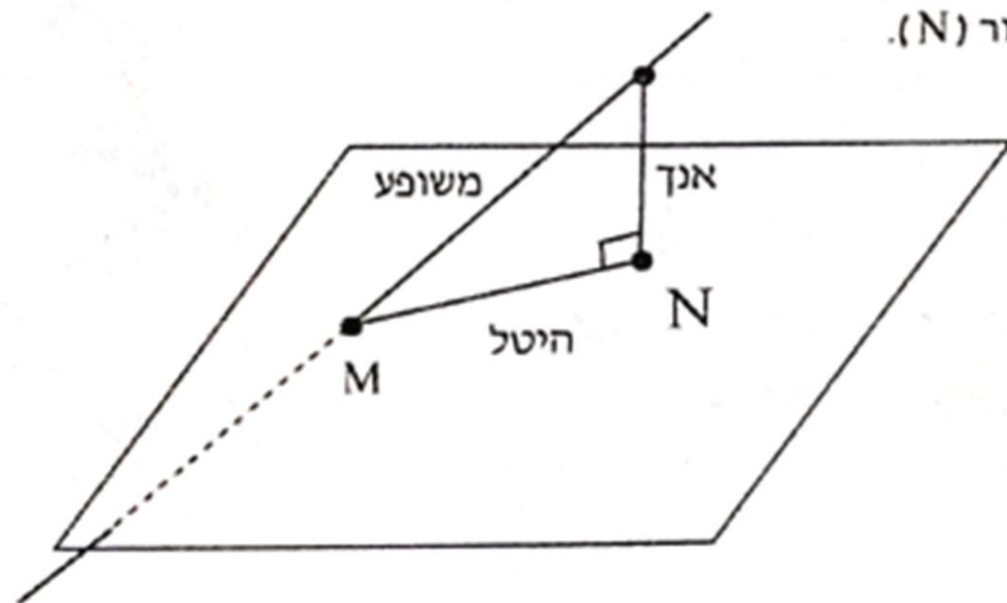
2. משופע הוא ישר החותך מישור ואינו מאונך לו.



$$P = m \cap \alpha$$

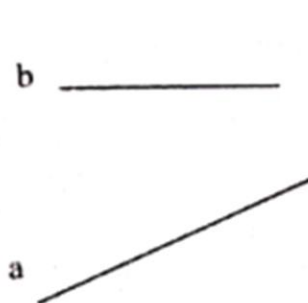
3. היטל של נקודה על מישור הוא עקב האנך היורד מהנקודה אל המישור (נקודת החיתוך של האנך והמישור)

4. היטל של משופע על מישור הוא אוסף כל ההיטלים של נקודות המשופע על המישור.
 ההיטל מתקבל על ידי העברת ישר במישור, דרך **עקב** המשופע (M) ודרך ההיטל של אחת מנקודות המשופע על המישור (N).



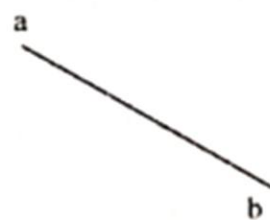
נשים לב, שמהגדרה נובע: היטל כל נקודה של המשופע על המישור נמצא על היטלו של המשופע.
 כלומר, אם מורידים אנך מנקודה כלשהי על המשופע אל המישור, עקבו נמצא על ההיטל של המשופע.

שני ישרים



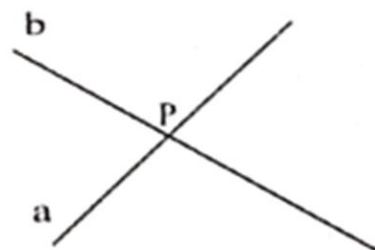
ישרים מצטלבים

ישרים שאינם מוכלים
באותו מישור (לא קיים
מישור המכיל את שניהם).
לכן, אין להם נקודות
משותפות



$a = b$
הישרים מתלכדים

לישרים מתלכדים יש יותר
נקודה משותפת אחת
(לכן כל הנקודות שלהם
משותפות).



$a \cap b = P$
ישרים נחתכים בנקודה P

לישרים נחתכים יש
נקודה משותפת אחת
בלבד. גם הם מוכלים
באותו מישור



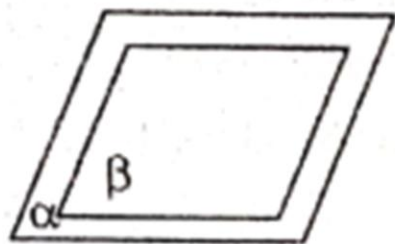
$a \parallel b$
ישרים מקבילים

ישרים המוכלים
באותו מישור
ואינם נחתכים

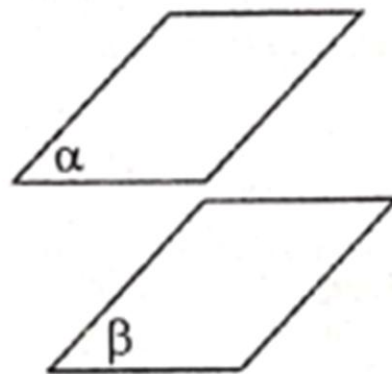
דרכים לקביעת מישור

- לפי אקסיומה (2), דרך כל שלוש נקודות שאינן נמצאות על ישר אחד עובר מישור אחד ויחיד. כלומר, שלוש נקודות מגדירות מישור חד-משמעי.
- מהאקסיומה נובע גם: שני ישרים נחתכים מגדירים מישור חד-משמעי.
- הסבר - אם נבחר שלוש נקודות בצורה הבאה: נקודת החיתוך שלהן, נקודה שניה על ישר אחד ונקודה שלישית על הישר השני – שלוש הנקודות הללו אינן נמצאות על ישר אחד (כי על פי ההגדרה לישרים נחתכים יש רק נקודה אחת משותפת), ולכן הן מגדירות מישור. מישור זה מכיל כל אחד מהישרים על פי אקסיומה (4) (אם ישר עובר דרך שתי נקודות במישור, אז הוא מוכל במישור).
- שני ישרים מקבילים נמצאים באותו מישור לפי ההגדרה, לכן גם הם מגדירים מישור אחד ויחיד.

שני מישורים

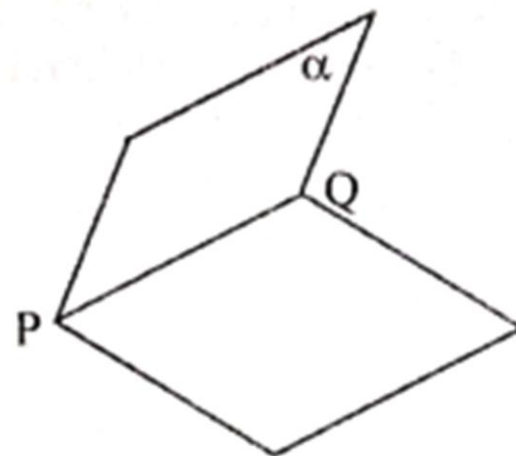


כל הנקודות שלהם משותפות.



$$\alpha \parallel \beta$$

המישורים α ו- β מקבילים
למישורים מקבילים אין
נקודות משותפות.



$$\alpha \cap \beta = PQ$$

המישורים α ו- β נחתכים
ו- PQ הוא ישר החיתוך.

זוויות במרחב

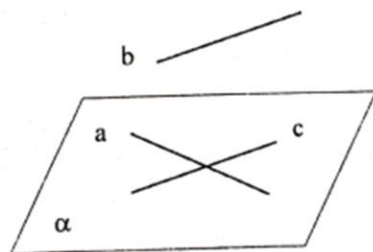
זווית בין ישרים

1. ישרים נחתכים:

ישרים נחתכים נמצאים באותו מישור, לכן הזווית ביניהם היא זווית רגילה בין שני ישרים במישור.

2. ישרים מצטלבים:

אם a ו- b שני ישרים מצטלבים, אז הזווית ביניהם היא הזווית בין הישר a וישר c כלשהו כך ש- a ו- c נמצאים באותו מישור ו- c מקביל ל- b . (ניתן להחליף בין a ל- b).



a ו- b מצטלבים

$c \parallel b$, $a, c \subset \alpha$

הזווית בין הישרים הנחתכים a ו- c היא

הזווית בין הישרים המצטלבים a ו- b .

$$\angle a \wedge b = \angle a \wedge c$$

זווית בין ישר למישור

הזווית בין ישר למישור היא הזווית שבין הישר לבין היטלו על המישור.

סדר בניית הזווית:

א. נמצא את נקודת החיתוך של הישר

עם המישור: $P = a \cap \alpha$

ב. נבחר $M \in a$ נקודה כלשהי.

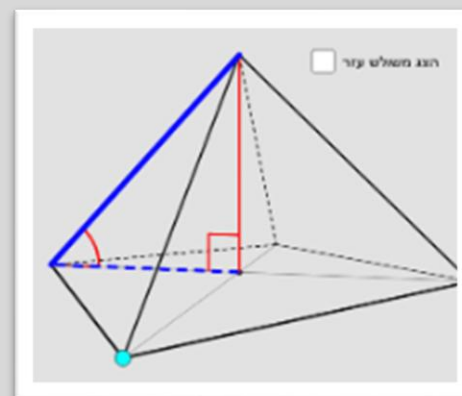
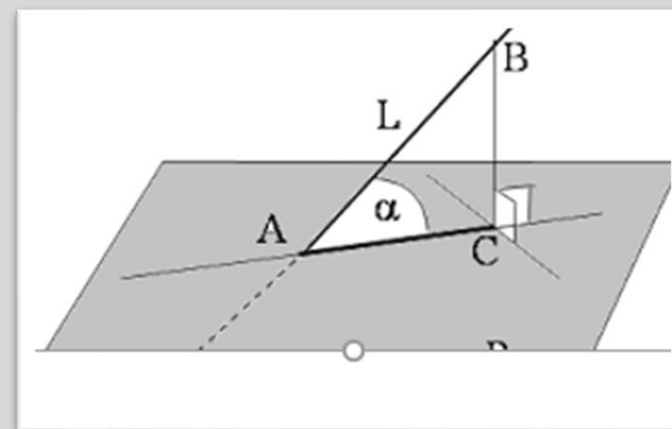
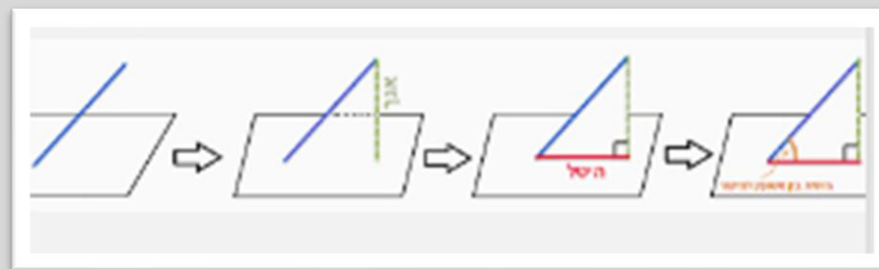
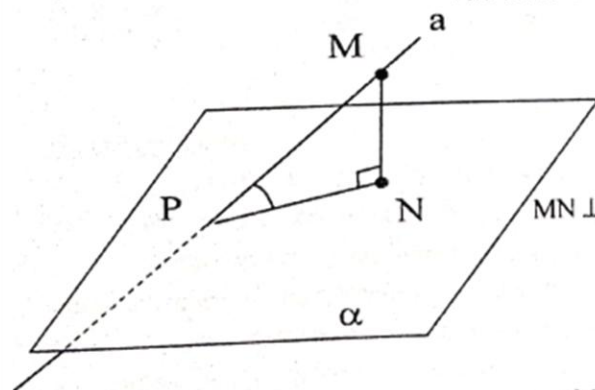
ג. נוריד מנקודה זו אנך MN למישור: $MN \perp \alpha$

(N היא עקב האנך).

ד. נעביר ישר דרך הנקודות P ו- N

(PN הוא ההיטל של a על α).

ה. הזווית המבוקשת היא: $\angle MPN = (\alpha \wedge a)$



זווית בין שני מישורים

זווית בין שני מישורים היא הזווית בין האנכים, שמעלים בכל אחד מהמישורים מנקודה כלשהי על קו החיתוך.

סדר הבניה:

א. נמצא את ישר החיתוך בין המישורים: $AB = \alpha \cap \beta$.

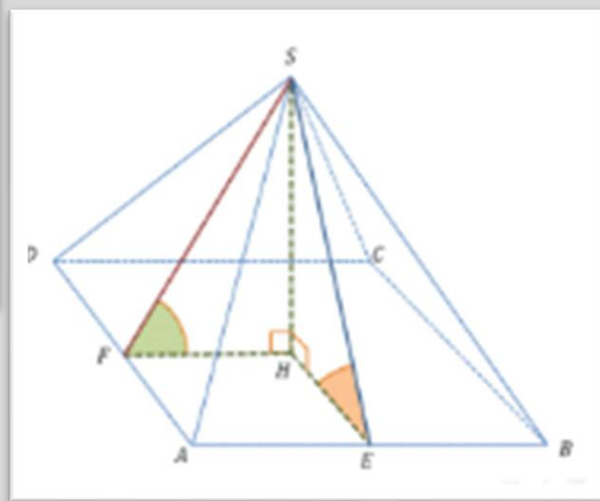
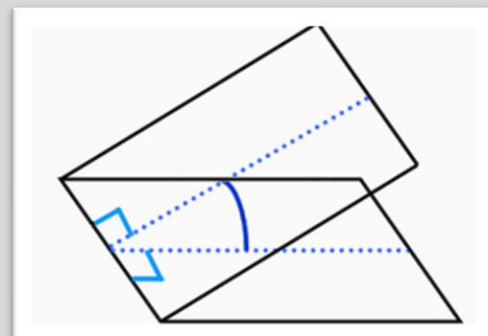
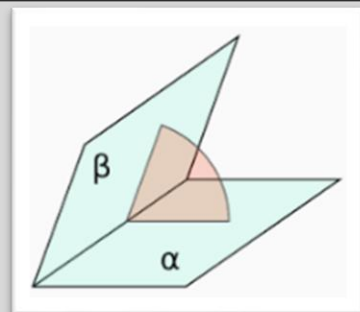
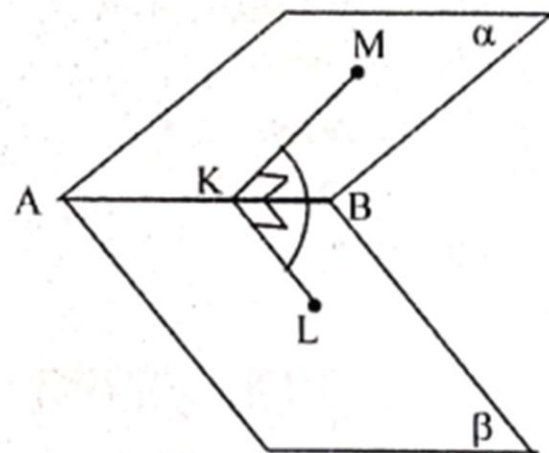
ב. נבחר נקודה כלשהי על ישר החיתוך, $K \in AB$.

ג. נעלה במישור α אנך $KM \perp AB$.

ד. נעלה במישור β אנך $KL \perp AB$.

ה. הזווית שהתקבלה: $\angle MKL = (\alpha \wedge \beta)$, היא הזווית

בין המישורים.



גופים במרחב

פאונים

הגדרה: פאון הוא גוף במרחב המוגבל על-ידי מספר סופי של מצולעים.
את המצולעים המגבילים פאון מכנים **פאות**, את צלעותיהם מכנים **מקצועות** והקדקודים של המצולעים הם גם **קדקודים** של הפאון.

דוגמאות:



פאון קמור

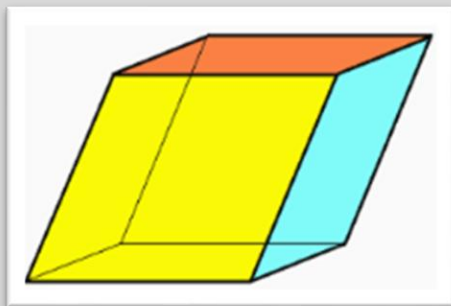
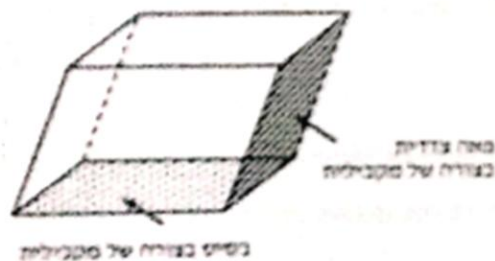
פאון, הנמצא כולו מצד אחד של כל מישור המכיל אחת מהפאות שלו (מעטוק רק בכאלו).

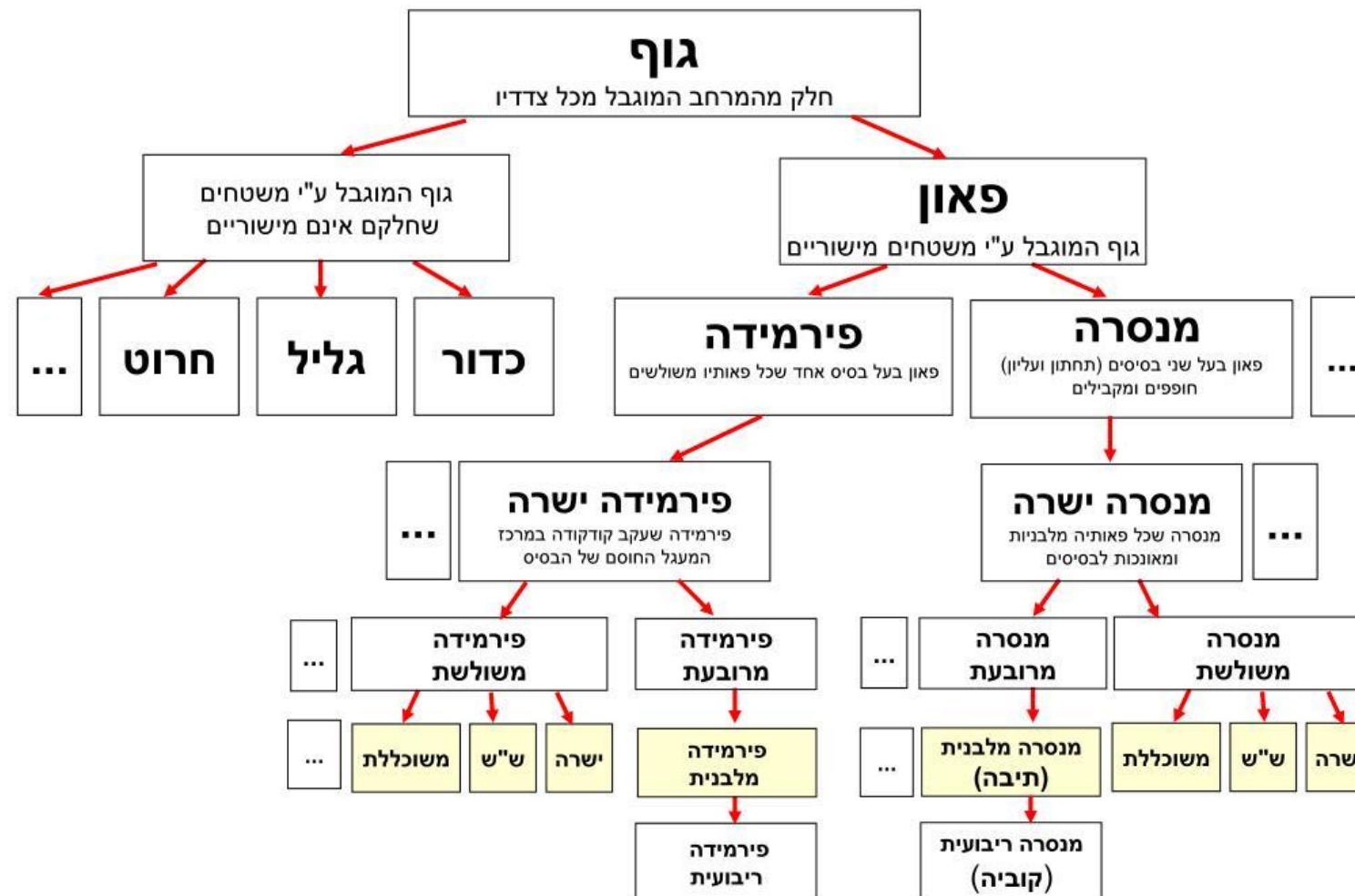
מקבילון

פאון בעל שש פאות, שכל אחת מהן היא מקבילית.

תיאור של מקבילון

כדי לתאר את המקבילון, מסרטטים מקבילית ומכל אחת מהקדקודים שלה מעלים קטעים מקבילים זה לזה בעלי אותו אורך ומתברים את הקצוות של הקטעים האלה. מקבילון ישר הוא מקבילון בעל מקצועות צדדיים המאונכים לבסיסים.





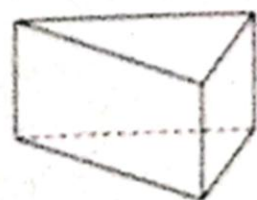
מנסרה

מנסרה היא פאון בעל זוג פאות נגדיות מקבילות שהן מצולעים חופפים מכנים אותם **בסיסי המנסרה**.

שאר הפאות הן מקביליות, אותן מכנים **פאות צדדיות של המנסרה**.

במקרה שהפאות הצדדיות הן מלבנים, **המנסרה היא ישרה**.

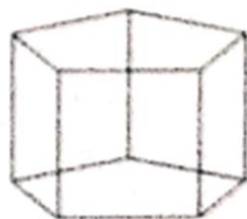
מבדילים בין המנסרות על-פי צורת מצולע הבסיס: מנסרה משולשת, מרובעת, מחומשת וכדומה.



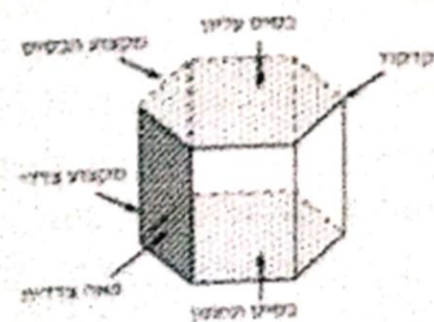
מנסרה משולשת ישרה



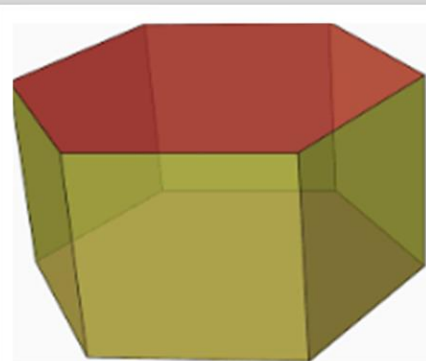
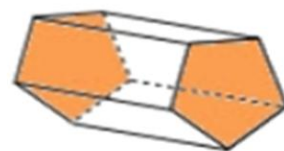
מנסרה מרובעת ישרה (תיבה)



מנסרה מחומשת ישרה



במנסרה ישרה, המקצוע הצדדי הוא גובה של תמונסרה.



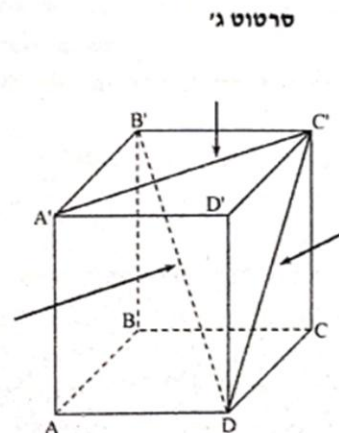
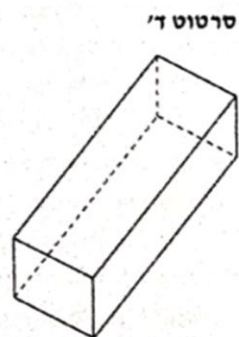
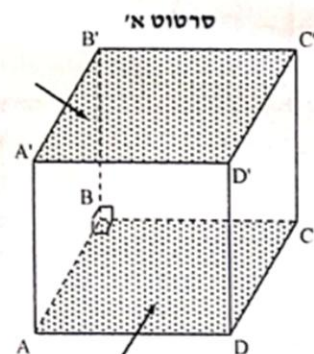
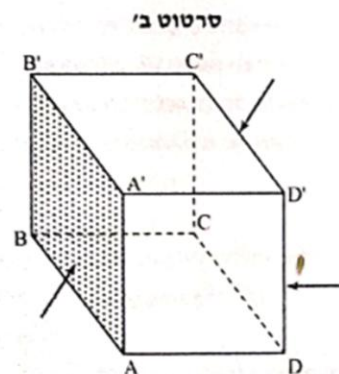
תיאור של תיבה

חשוב לסרטט את התיבה בצורה נוחה ביחס לנתונים.

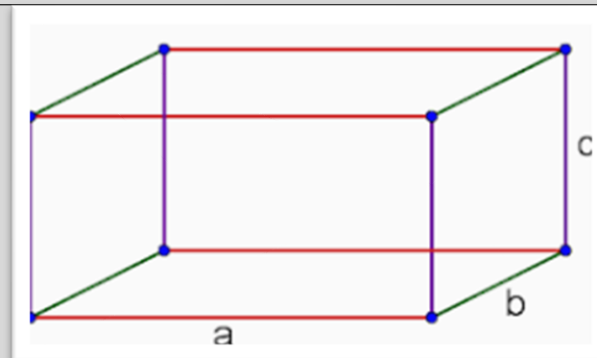
לדוגמה, בסרטוט א' ניתן לראות בצורה נוחה את הבסיסים ואת הפאה הצדדית $DD'C'C$.

סרטוט ב' פחות נוח מבחינת הבסיס התחתון והפאה $BB'C'C$,

אבל קל יותר לראות בו את הפאה $BB'A'A$ ואת הבסיס העליון.



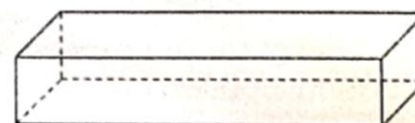
ברוב התרגילים רצוי לסרטט באופן א' או ג'. לפעמים הסרטוט כבר נתון והתיבה לא ממוקמת במרחב כפי שאנו רגילים. במקרה זה, בוחרים את מלבני הבסיסים בהתאם לנתונים ולנוחות הפתרון.



תיבה

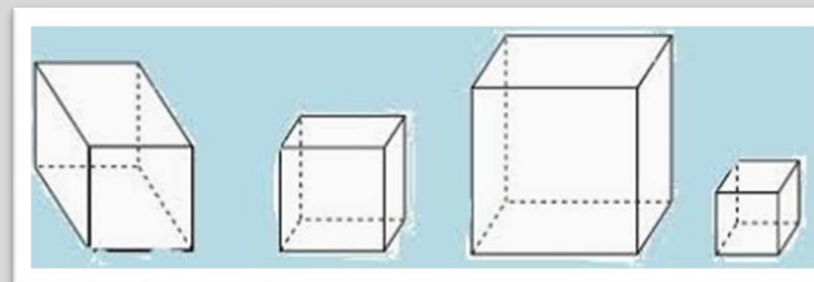
מקבילון שכל הפאות שלו מלבנים.

אפשר להגדיר תיבה גם כמנסרה ישרה שבסיסה מלבן.



בתיאור של גופים מרחביים במישור נשים לב לכמה כללים:

- הישרים המקבילים במרחב, גם בסרטוט מישורי יהיו מקבילים.
- במישורים הנראים "מולנו", רואים זוויות בגודל האמיתי שלהן. גם הקטעים השווים או מאונכים במרחב, נראים שווים או מאונכים במישורים כאלו. תכונות אלו יתבטאו בסרטוט המישורי.
- במישורים הנראים "מהצד", לא רואים את הזוויות בגודל האמיתי שלהן, לכן זוויות ישרות מסמנים על הסרטוט בסימן המקובל.



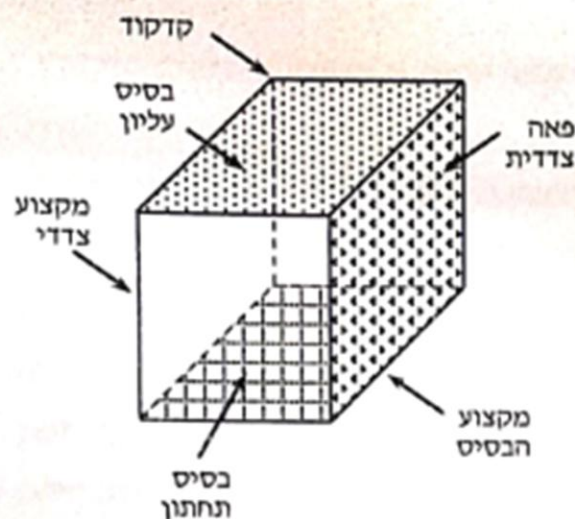
קובייה

פאון בעל שש פאות שכל אחת מהן ריבוע.

אפשר להגדיר את הקובייה גם כתיבה שכל הפאות שלה ריבועים.

תיאור של קובייה

נשים לב: לפאות שרואים אותן "מולנו" יש צורה של ריבוע.



אלכסונים

מבדילים בין שלושה סוגים של אלכסוני פאון:

- אלכסוני פאות צדדיות
- אלכסוני הבסיסים
- אלכסוני הגוף

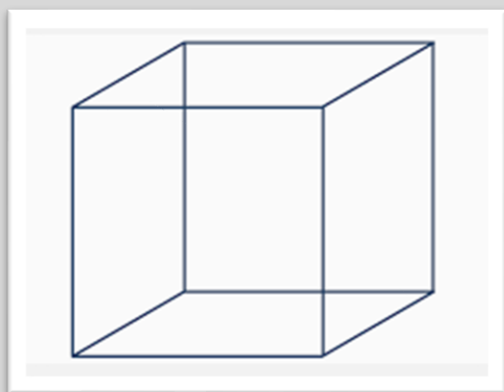
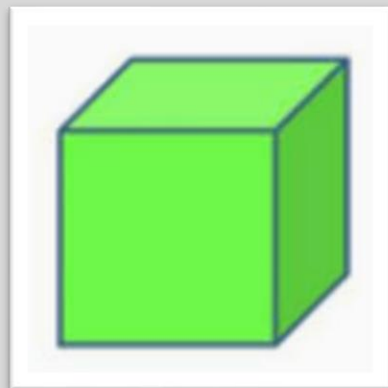
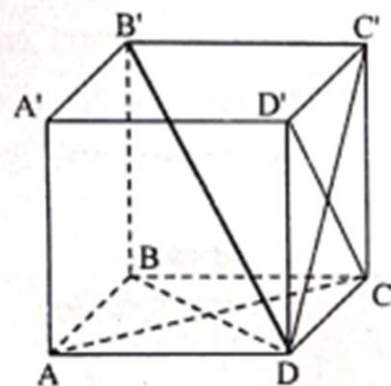
לדוגמא, בסרטוט מתוארת קובייה עם סוגים שונים של אלכסונים:

BD ו- AC הם אלכסונים של הבסיסים.

CD' ו- $D'C$ הם אלכסונים של הפאה הצדדית $CC'D'D$.

(באותו אופן אפשר לבנות אלכסונים של כל אחת מהפאות הצדדיות האחרות).

AC' , BD' , CA' , DB' הם אלכסונים של הקובייה.



פירמידה

פאון שאחת הפאות שלו היא מצולע כלשהו (בסיס)
ושאר הפאות הן משולשים (פאות צדדיות).

תיאור של פירמידה

פירמידה מתקבלת על-ידי חיבור של קדקודי המצולע עם נקודה,

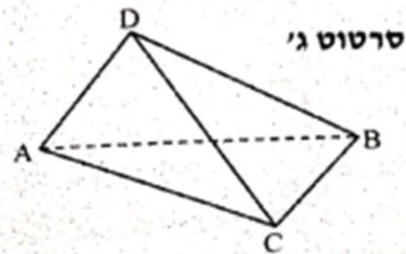
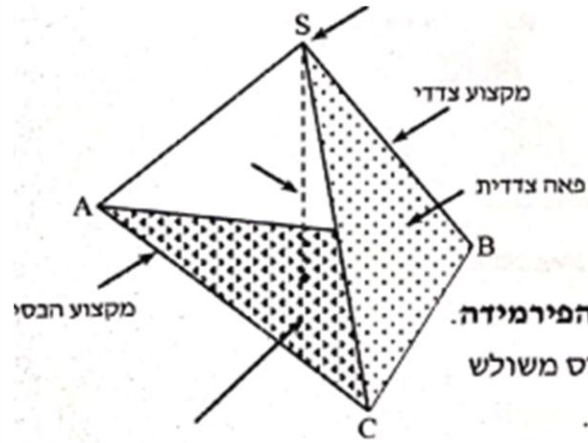
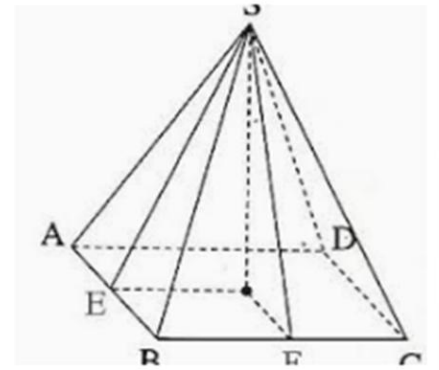
הנמצאת מחוץ למישור המצולע. נקודה זו מכנים **קדקוד הפירמידה** או **ראש הפירמידה**.

מבדילים בין הפירמידות על-פי המצולע שבבסיסן: בפירמידה משולשת הבסיס משולש
(פירמידה זו מכנים גם טטראדר), פירמידה מרובעת (הבסיס מרובע) וכדומה.

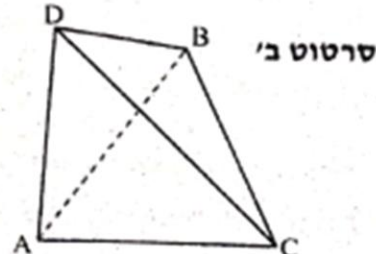
בסרטטים להלן מתוארות פירמידות משולשות. אם הסרטוט אינו נתון, אזי צורת הסרטוט תלויה בנתונים
אתם מתכוונים לעבוד.

לדוגמה: בסרטוט א' רואים היטב את הזווית בין המישורים ADC ו- ABD וגם את הזווית בין הפאה ADB
לבסיס, אך רואים בו באופן פחות ברור את הזווית בין הפאות האחרות.
סרטוט ב' לא נוח לשימוש.

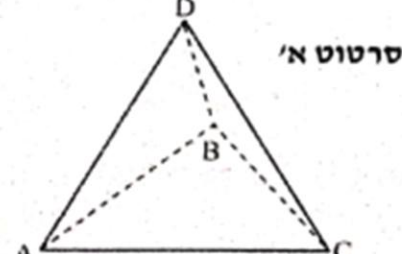
סרטוט ג' הוא הסרטוט השימוש ביותר: רואים בו היטב את כל הזוויות בין הפאות הצדדיות, וגם את הזוויות
בין הפאות הצדדיות לבין הבסיס.



סרטוט ג'



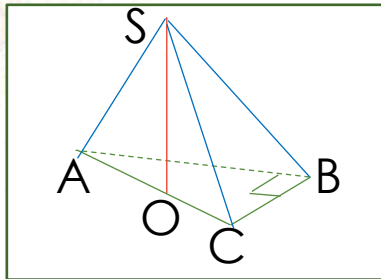
סרטוט ב'



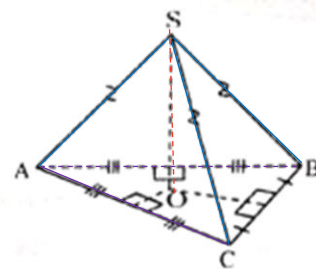
סרטוט א'

פירמידה ישרה

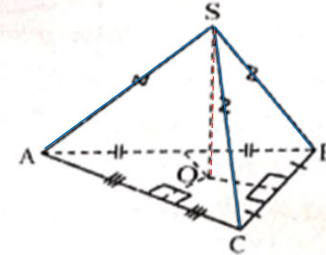
פירמידה שכל המקצועות הצדדיים שלה שווים ביניהם.
 הסרטוט של פירמידה ישרה מבוסס על התכונה החשובה ביותר שלה: בפירמידה ישרה, עקב הגובה לבסיס הוא מרכז המעגל החוסם את הבסיס. במילים אחרות: האנך מקדקוד הפירמידה לבסיסה מגיע למרכז המעגל החוסם את הבסיס (נוכיח טענה זו בהמשך).
 נשים לב שמתכונה זו נובע, שבסיס של פירמידה ישרה יכול להיות אך ורק מצולע בר חסימה במעגל.
 כדי לסרטט פירמידה ישרה, מסרטטים את הבסיס, מסמנים מרכז מעגל החוסם אותו וממנו מעלים אנך. אנך זה הוא גובה הפירמידה. מסמנים עליו קדקוד ומעבירים את המקצועות הצדדים.



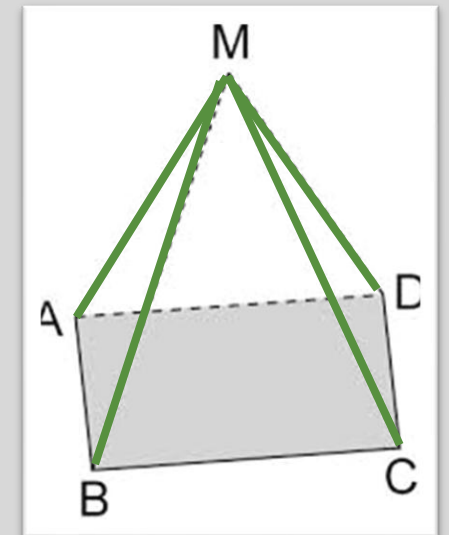
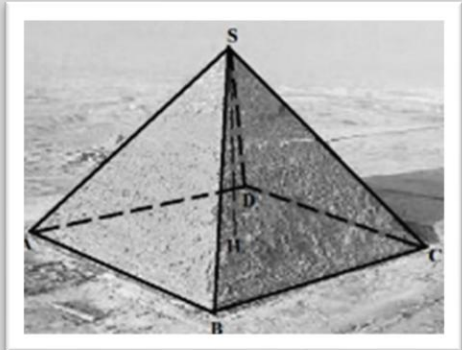
SABC פירמידה משולשת ישרה
 $(SA = SB = SC)$
 אם ABC משולש ישר זווית
 $(\angle ABC = 90^\circ)$ אזי הנקודה O
 נמצאת באמצע היתר AC
 ומישור הפאה ASC מאונך
 לבסיס הפירמידה (נוכיח
 בהמשך).



SABC פירמידה משולשת ישרה
 $(SA = SB = SC)$
 אם ABC משולש שווה-שוקיים
 $(AB = AC)$, אזי הנקודה O
 נמצאת על הגובה לבסיס
 במשולש ABC.

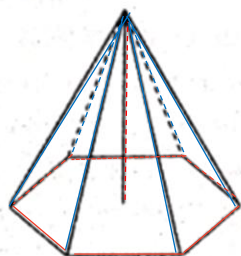


SABC פירמידה משולשת ישרה
 $(SA = SB = SC)$
 O היא נקודת החיתוך של
 האנכים האמצעיים
 במשולש ABC.

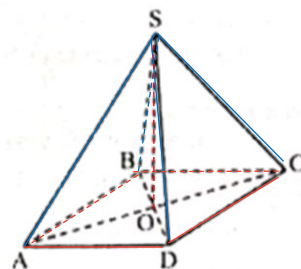


פירמידה משוכללת

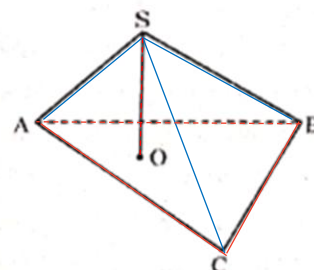
פירמידה ישרה שבסיסה מצולע משוכלל.



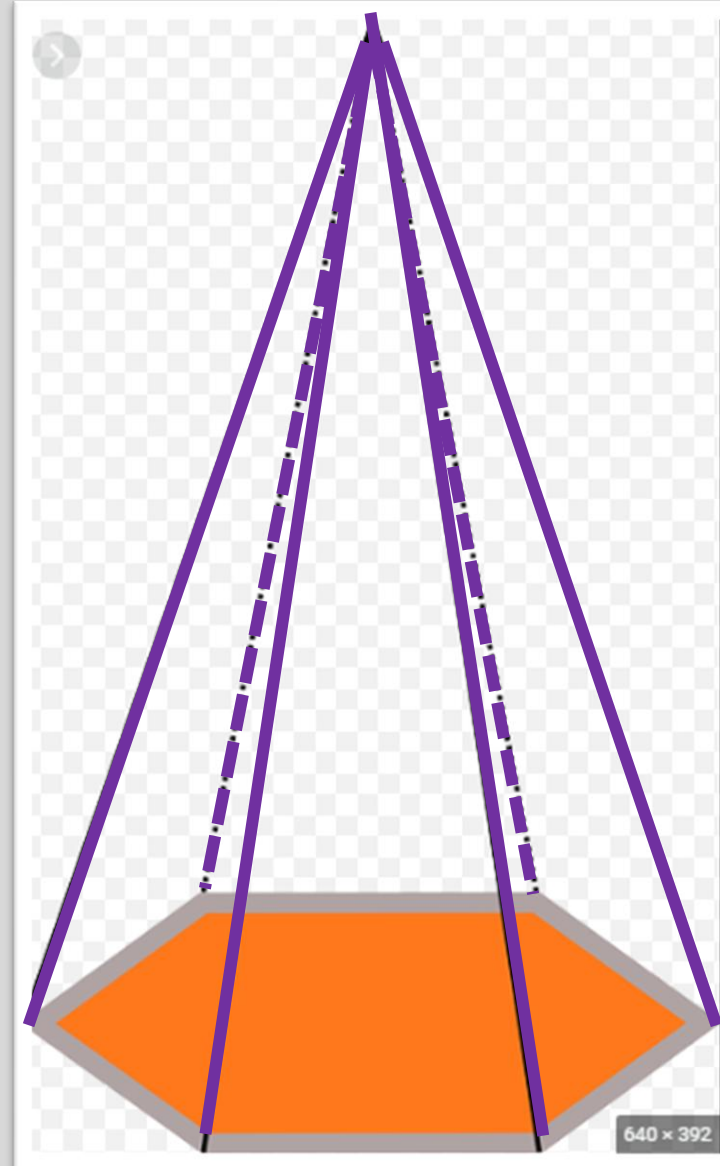
פירמידה משושה משוכללת



$SA = SB = SC = SD$
 $AB = BC = CD = DA$
 במקרה זה הבסיס ריבוע
 ומרכז המעגל החוסם
 הוא נקודת מפגש האלכסונים.



$SA = SB = SC$
 $AB = BC = AC$
 במקרה זה הבסיס מש"צ
 ומרכז המעגל החוסם הוא
 נקודת המפגש של הגבהים,
 חוצי הזוויות והתיכונים
 של המשולש.



640 × 392



משפטים בסיסיים של הנדסת המרחב

1. א. אם לשני מישורים יש נקודה משותפת, אז יש להם ישר משותף, הנקרא **ישר החיתוך** של שני המישורים.

ב. אם שני מישורים אינם מתלכדים ויש להם ישר משותף, אז כל נקודה משותפת שלהם שייכת לישר זה.

הקבלה במרחב

2. אם ישר, שאינו שייך למישור, מקביל לאחד הישרים שבמישור, אז ישר זה מקביל למישור.

3. אם ישר מקביל למישור ומוכל במישור אחר החותך את המישור הראשון, אז ישר זה מקביל לישר החיתוך בין שני המישורים.

4. אם שני ישרים מקבילים נמצאים במישורים נחתכים, אחד בכל מישור, אז ישר החיתוך של המישורים מקביל לכל אחד מהישרים הללו.

5. אם כל אחד משני ישרים מקביל לישר שלישי, אז הם מקבילים זה לזה.

6. אם שני מישורים מקבילים נחתכים על ידי מישור שלישי, אז ישרי החיתוך של המישור השלישי עם כל אחד מהמישורים הם מקבילים.

7. אם כל אחד משני מישורים במרחב מקביל למישור שלישי, אז הם מקבילים זה לזה.

8. אם שני ישרים מקבילים חותכים שני מישורים מקבילים, אז קטעי הישרים הנמצאים בין המישורים שווים זה לזה.

9. שתי זוויות במרחב ששוקיהן מקבילות בהתאמה, שוות זו לזו או משלימות זו את זו ל- 180° .

ניצבות במרחב

10. אם ישר החותך מישור מאונך לשני ישרים נחתכים המוכללים במישור, אז הוא מאונך למישור.
 11. מכל נקודה שאינה שייכת למישור ניתן להוריד אנך אחד ויחיד למישור.
 12. מכל נקודה השייכת למישור אפשר להעלות אנך אחד ויחיד למישור זה.
 13. אם שני מישורים מאונכים לאותו ישר, אז המישורים מקבילים זה לזה.
 14. אם שני ישרים נחתכים, הנמצאים במישור אחד, מקבילים בהתאמה לשני ישרים נחתכים הנמצאים במישור אחר, אז המישורים מקבילים זה לזה.
 15. אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך למישור, אז גם הישר השני מאונך למישור זה.
 16. שני ישרים המאונכים לאותו מישור מקבילים זה לזה.
-
17. דרך כל נקודה הנמצאת מחוץ לישר, אפשר להעביר מישור אחד ויחיד המאונך לישר זה.
 18. משפט שלושת האנכים: ישר הנמצא במישור מאונך למשופע לאותו מישור אם ורק אם הוא מאונך להיטלו של המשופע על המישור.
 19. אם שני מישורים מאונכים זה לזה, אז כל ישר הנמצא באחד המישורים ומאונך לישר החיתוך שלהם, מאונך למישור השני.
 20. אם ישר מאונך למישור, אז כל מישור המכיל את הישר מאונך אף הוא למישור הנתון.
 21. אם כל אחד משני מישורים נחתכים מאונך למישור שלישי, אז ישר החיתוך שלהם מאונך אף הוא למישור השלישי.
 22. ישר, המאונך לאחד משני מישורים מקבילים, מאונך גם למישור השני.

23. אם דרך נקודה מחוץ למישור עוברים שני משופעים למישור, אז הקטעים מהנקודה המשותפת עד נקודות החיתוך עם המישור של כל אחד מהם שווים זה לזה, אם ורק אם ההיטלים של הקטעים האלה שווים זה לזה.
24. היחס בין שטח היטלו של מצולע מישורי על מישור אחר, לבין שטח המצולע, שווה לקוסינוס הזווית בין המישורים.

גופים

25. ארבעת אלכסוני המקבילון עוברים בנקודה אחת ונחצים בה.
26. ארבעת אלכסוני התיבה שווים ונחצים. נקודת החיתוך של אלכסוני התיבה היא מרכז הכדור החוסם את התיבה.
27. ריבוע האלכסון בתיבה שווה לסכום ריבועי שלושת ממדיה.
28. בחיתוך פירמידה ע"י מישור המקביל לבסיסה מתקיים:
- א. החתך הוא מצולע דומה למצולע שבבסיס הפירמידה.
- ב. היחס בין שטח החתך ושטח הבסיס של הפירמידה שווה לריבוע יחס מרחקיהם מקדקוד הפירמידה.
29. בחיתוך חרוט ע"י מישור מקביל לבסיסו, החתך הוא מעגל שהיחס בין שטחו לשטח בסיס החרוט שווה לריבוע יחס מרחקיהם מקדקוד החרוט.
30. פירמידה היא ישרה אם ורק אם עקב גובהה הוא מרכז המעגל החוסם את בסיסה.
31. כל הפאות של פירמידה יוצרות זוויות שוות עם הבסיס אם ורק אם עקב גובהה הוא מרכז המעגל החוסם בבסיסה.

גופי סיבוב

32. מישור החותך כדור חותך אותו לאורך מעגל.
33. מישור משיק לכדור אם ורק אם הוא מאונך לרדיוס בנקודה המשותפת שלהם.
34. בהינתן שני כדורים משיקים (השקה חיצונית או פנימית), שני המרכזים ונקודת ההשקה נמצאים על ישר אחד.
35. דרך כל ארבע נקודות במרחב, שאינן במישור אחד, ניתן להעביר כדור אחד ויחיד.
36. כל פירמידה ישרה ניתנת לחסימה בכדור. מרכז הכדור נמצא על גובה הפירמידה.
37. בכל פירמידה, שפאותיה הצדדיות נטויות בזוויות שוות לבסיס, ניתן לחסום כדור. מרכז הכדור נמצא על גובה הפירמידה.
- הערה · כאשר גוף סיבובי חוסם גוף סיבובי אחר, אין צורך להוכיח שציריהם מתלכדים.



הוכחות של המשפטים

10. אם ישר מאונך לשני ישרים לא מקבילים במישור אז הוא מאונך למישור.
(ז"א על פי ההגדרה של ישר מאונך למישור הוא מאונך לכל ישר במישור) – תנאי הניצבות.

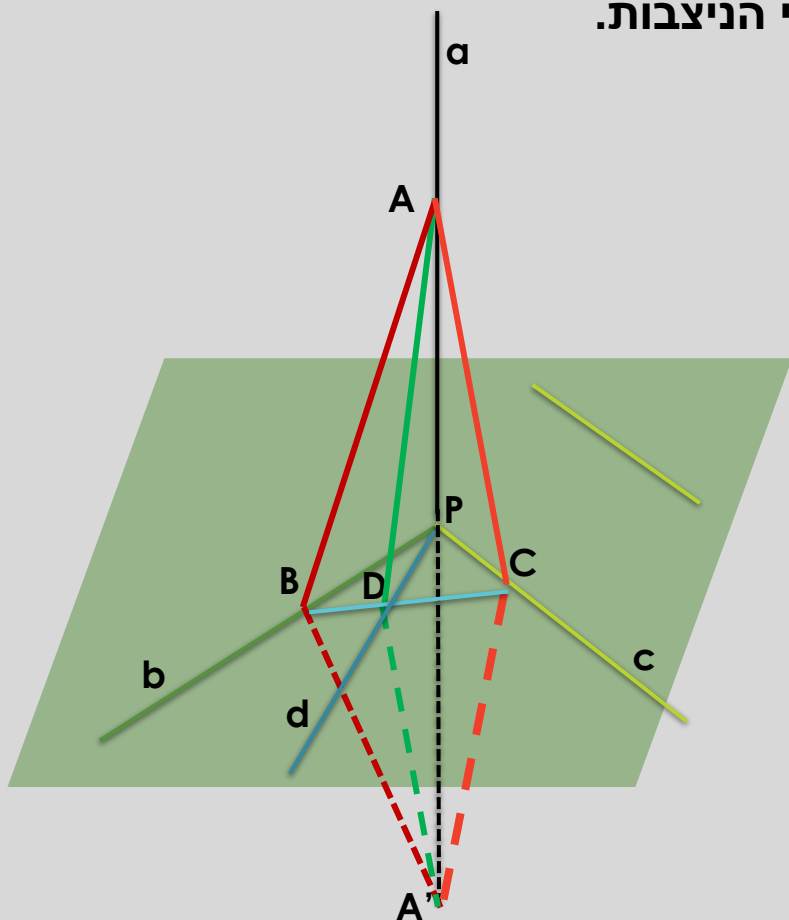
נתון:

$$a \perp b, a \perp c, b \subset \alpha, c \subset \alpha, d \subset \alpha$$

$$\text{צ.ל.: } a \perp \alpha$$

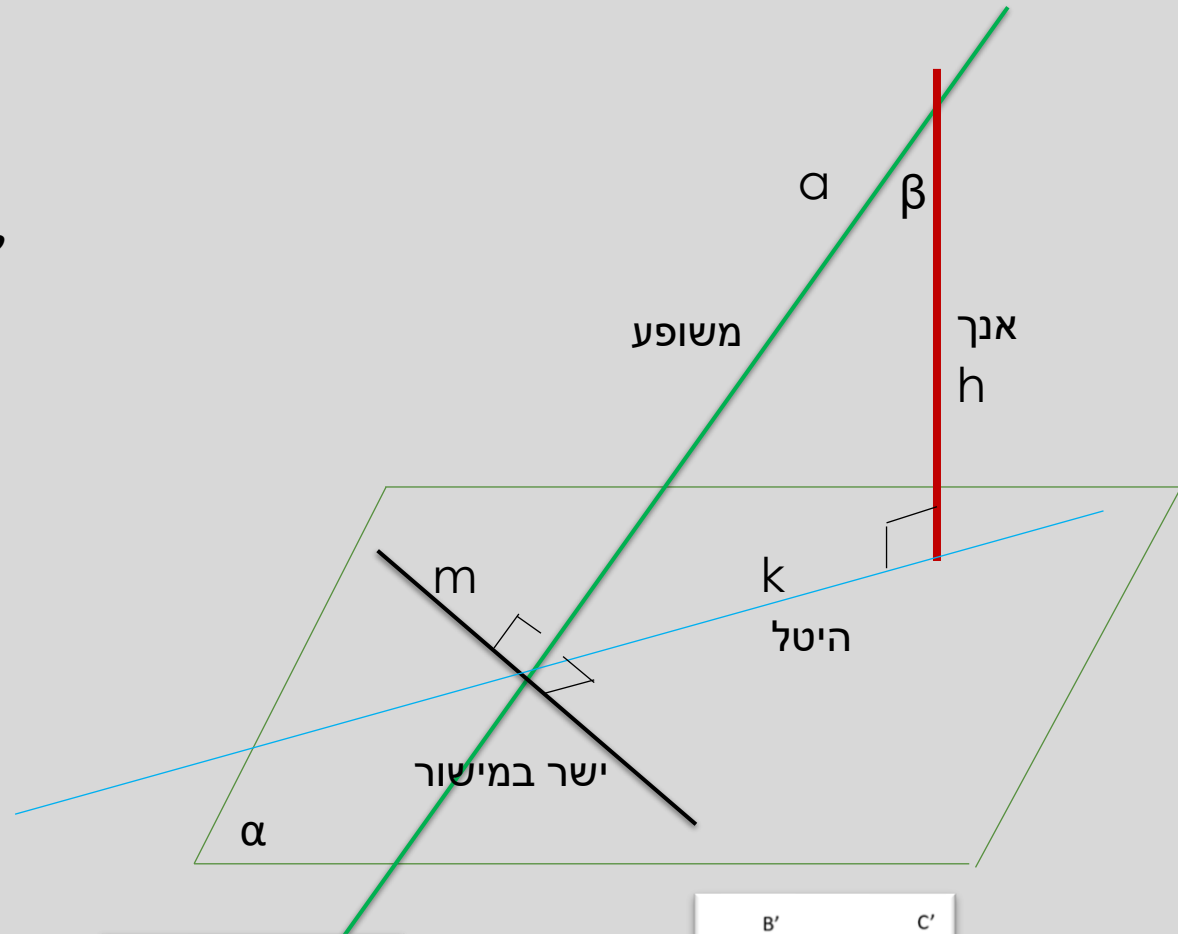
הוכחה: ניקח d ישר כלשהו במישור α . נוכיח ש $a \perp d$.

1. נסמן על ישר a נקודה A , על ישר b נקודה B , ועל ישר c נסמן נקודה C .
2. נסמן P נקודת החיתוך של ישר a עם מישור α .
3. נמשיך את ישר a לצד השני של מישור α . נסמן $A' \in a$, כך ש $AP = A'P$.
4. נעביר קטעים $AB, A'B, AC, A'C$.
5. $\triangle ABP \cong \triangle A'BP$ (צ.ז.צ., $A'P = AP$, $\angle APB = \angle A'PB = 90^\circ$ - צלע משותפת).
6. $A'B = AB$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים).
7. $\triangle ACP \cong \triangle A'CP$ (צ.ז.צ., $A'P = AP$, $\angle APC = \angle A'PC = 90^\circ$ - צלע משותפת).
8. $A'C = AC$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים).
9. $\triangle ACB \cong \triangle A'CB$ (צ.צ.צ., $A'B = AB$, $A'C = AC$, $\angle BCB$ - צלע משותפת).
10. $\angle ABC = \angle A'BC$ (זוויות מתאימות במשולשים חופפים).
11. נעביר במישור α קטע BC . נסמן $D = BC \cap d$.
12. $\triangle ABD \cong \triangle A'BD$ (צ.ז.צ., $A'B = AB$, $\angle ABD = \angle A'BD = 90^\circ$ - צלע משותפת).
13. $A'D = AD$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים). לכן $\triangle ADA'$ שווה שוקיים.
14. $A'P = AP$ (ע"פ 3) לכן DP תיכון ב $\triangle ADA'$.
15. DP גובה ב $\triangle ADA'$ כי במשולש שווה שוקיים תיכון וגובה מזווית הראש מתלכדים.
16. לכן $AA' \perp DP$ לכן $d \perp a$. בגלל ש d ישר כלשהו במישור באות אופן a מאונך לכל ישר במישור. לכן ע"פ ההגדרה $a \perp \alpha$.



18. משפט על שלושה ניצבים: ישר המוכל למישור מאונך למשופע לאותו מישור, אם ורק אם הוא מאונך להיטלו של המשופע על המישור

1. ישרים נחתכים α ו k מגדירים מישור β
2. $h \perp \alpha$ לכן h מאונך לכל ישר במישור α .
3. לכן $h \perp m$.
4. ע"פ הנתון $k \perp m$
5. לכן m מאונך לשני ישרים של מישור β לכן $m \perp \beta$.
6. ישר שמאונך למישור מאונך לכל ישר במישור זה. לכן $m \perp \alpha$.



נתון:

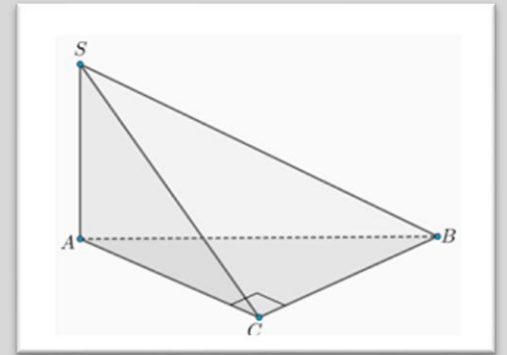
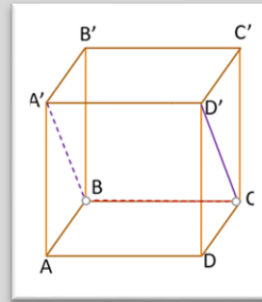
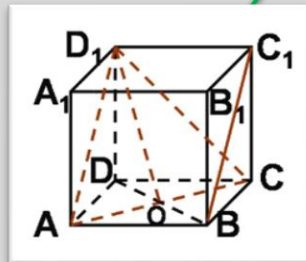
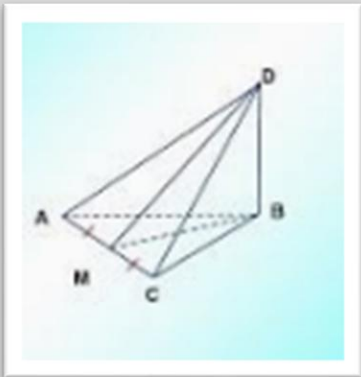
$$m \subset \alpha$$

a משופע

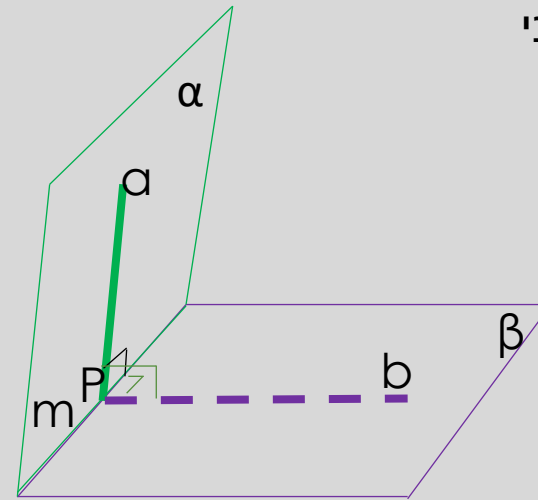
k היטל של a על המישור α

צ.ל.

אם $m \perp k$ אז $m \perp a$
אם $m \perp a$ אז $m \perp k$



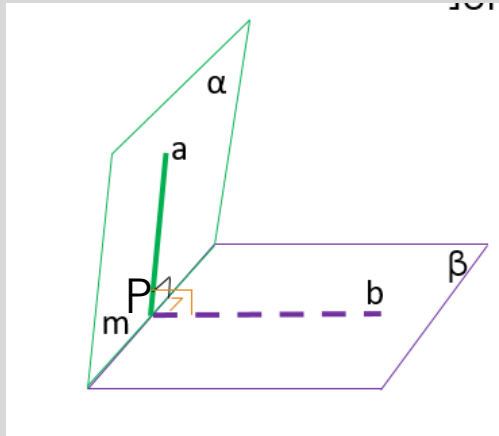
19. אם שני מישורים מאונכים זה לזה אז כל ישר שמוכל באחד המישורים ומאונך לקו החיתוך שלהם מאונך למישור השני



נתון:
 $\alpha \perp \beta$
 $m = \alpha \cap \beta$
 $\alpha \in a$
 $a \perp m$
 צ.ל.
 $\alpha \perp \beta$

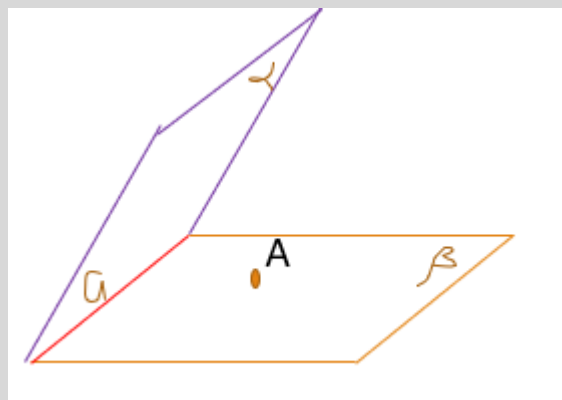
1. נסמן: $P = a \cap m$
2. נעלה במישור β בנקודה P : $b \perp m$
3. $a \perp m$ (נתון), $b \perp m$ (ע"פ 2),
 $m = \alpha \cap \beta$ (נתון) לכן ע"פ הגדרת הזווית בין שני מישורים, הזווית בין הישרים α ו b היא זווית בין המישורים α ו β .
4. ע"פ הנתון $\alpha \perp \beta$ לכן $a \perp b$ (ע"פ 3).
5. $a \perp m$ ע"פ נתון. ישר a מאונך לשני ישרים במישור β (α ו m) לכן ישר a מאונך למישור β ($\alpha \perp \beta$).

20. אם ישר מאונך למישור נתון, אז כל מישור המכיל את הישר מאונך אף הוא למישור הנתון.



נתון:
 $a \perp \beta$
 $\alpha \in a$
 צ.ל.
 $\alpha \perp \beta$

1. נסמן: $m = \alpha \cap \beta$
2. נסמן: $P = a \cap m$
3. נעלה במישור β בנקודה P : $b \perp m$
4. $a \perp \beta$ (נתון), לכן $a \perp m$, $a \perp b$ (ישר שמאונך למישור, מאונך לכל ישר במישור זה)
5. $a \perp m$ (4), $b \perp m$ (2)
6. לכן ע"פ הגדרת הזווית בין שני מישורים, הזווית בין הישרים α ו b היא זווית בין המישורים α ו β .
7. $a \perp b$ (4) לכן $\alpha \perp \beta$

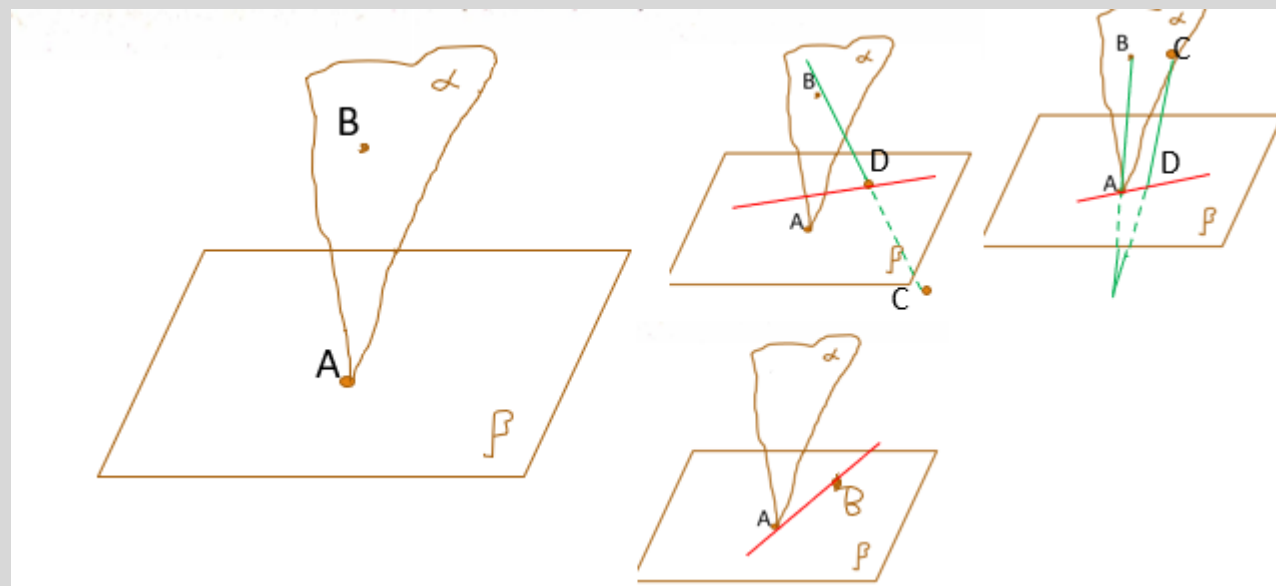
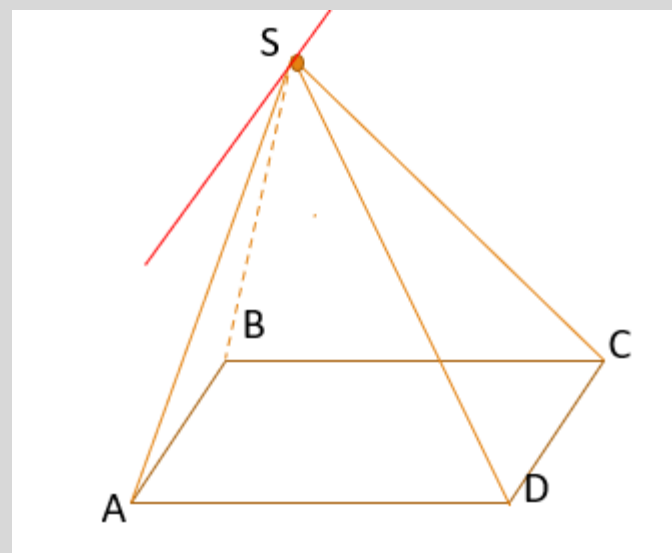


1
אם לשני מישורים יש נקודה משותפת, אזי יש להם ישר משותף. ישר זה נקרא ישר החיתוך של שני המישורים.

ניסוח פורמאלי: $A \in \alpha, A \in \beta \Rightarrow \exists a : a = \alpha \cap \beta, A \in a$

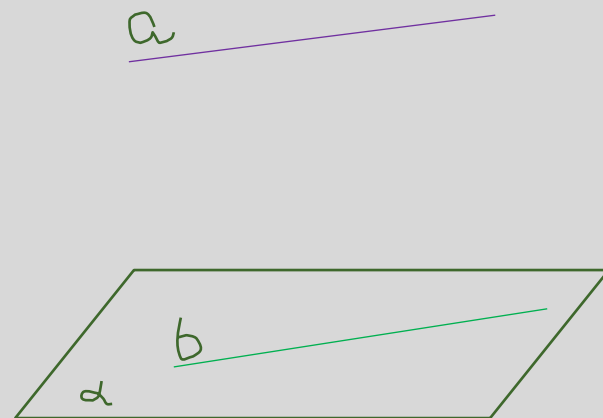
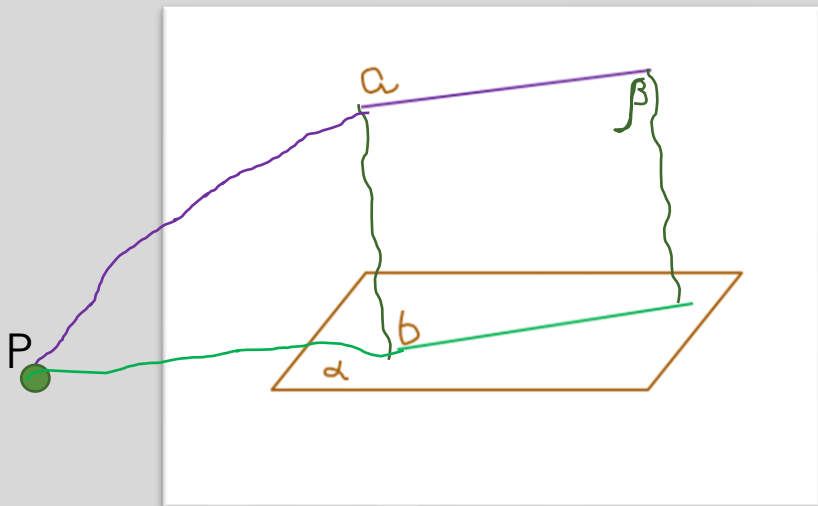
אם שני מישורים אינם מתלכדים ויש להם ישר משותף, אזי כל נקודה משותפת שלהם שייכת לישר זה.

ניסוח פורמאלי: $a = \alpha \cap \beta, P \in \alpha, P \in \beta \Rightarrow P \in a$



2. תנאי הקבלה של ישר למישור: אם ישר שאינו מוכל במישור, מקביל לאחד הישרים במישור, אזי הישר מקביל למישור.

ניסוח פורמאלי: $a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$

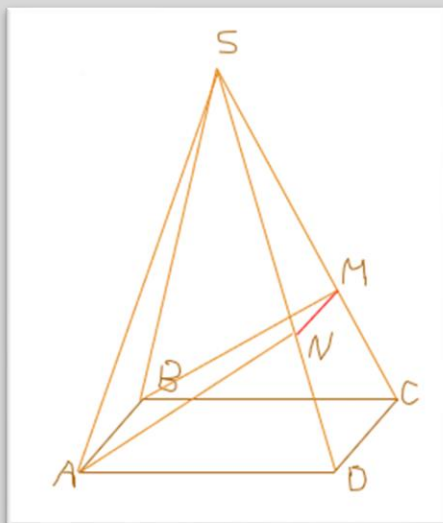


הוכחה: ישרים מקבילים מגדירים מישור. נקרא למישור שמוגדר ע"י הישרים a ו b . $\beta = a \cup b$. נניח בשלילה שישר α לא מקביל למישור α . אם כך אז יש להם נקודה משותפת $P = a \cap \alpha$. $P \in a, a \in \beta \Rightarrow P \in \beta$. לכן נקודה P שייכת גם למישור α וגם למישור β . אם כך אז על פי המשפט הראשון היא שייכת לישר החיתוך שלהם: $P \in b$. סתירה! כי על פי הנתון הישרים a ו α מקבילים ואין להם נקודות משותפות. לכן ההנחה לא נכונה וישר α מקביל למישור α .

3. אם ישר מקביל למישור ומוכל במישור אחר החותך אותו, אזי ישר זה מקביל לישר החיתוך בין שני המישורים.

ניסוח פורמאלי: $a \parallel \alpha, a \subset \beta, b = \alpha \cap \beta \Rightarrow a \parallel b$

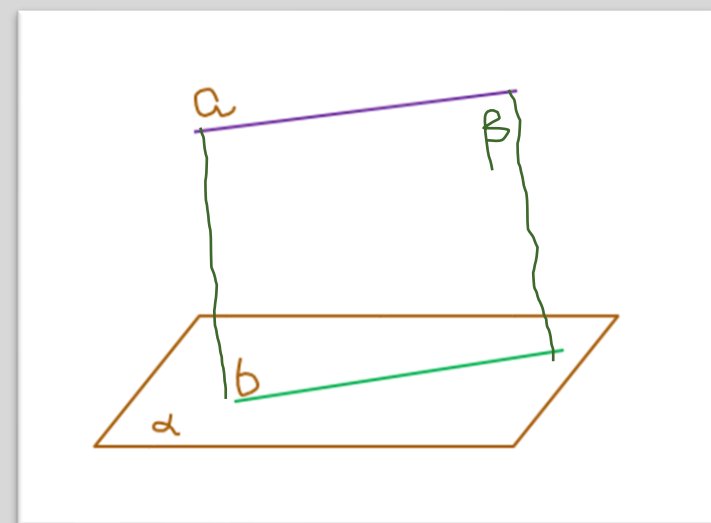
דוגמא לשימוש



על פי משפט 2:

$AB \parallel DC \Rightarrow AB \parallel (SDC)$
 $AB \subset (ABMN)$
 $MN = (ABMN) \cap (SDC)$

$\Rightarrow AB \parallel MN$

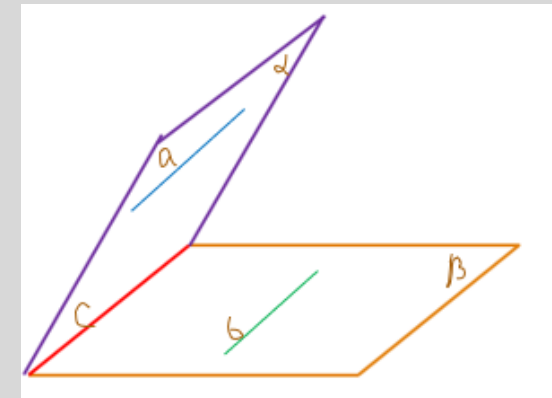
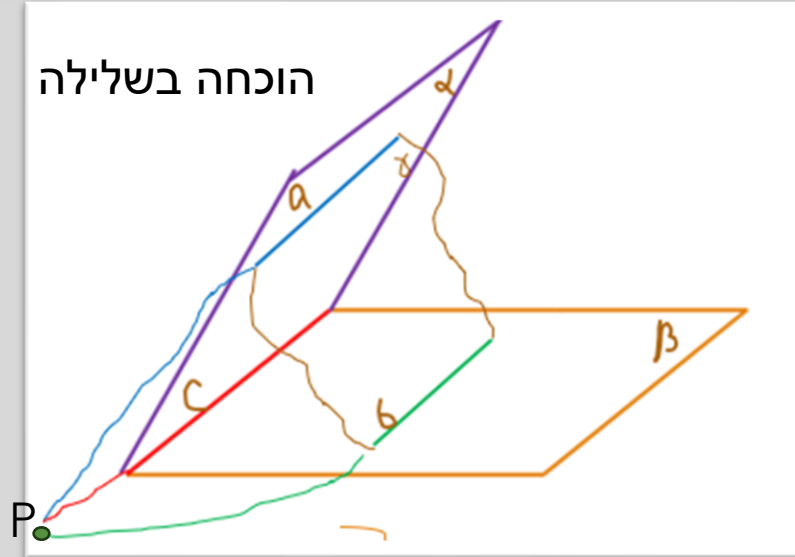


הוכחה: $b = \alpha \cap \beta$. נניח בשלילה שישר a לא מקביל לישר b . אם כך אז יש להם נקודה משותפת $P = a \cap b$. $P \in b, b \in \alpha \Rightarrow P \in \alpha$. $P \in a$ שייכת גם למישור α וגם לישר a . סתירה! כי על פי הנתון הישרים a ו- α מקבילים ואין להם נקודות משותפות. לכן ההנחה לא נכונה וישר a מקביל לישר b .

4. אם שני ישרים מקבילים מוכלים בשני מישורים נחתכים, אזי, קו החיתוך של המישורים מקביל לכל אחד מהישרים הללו.

ניסוח פורמאלי: $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel b, m = \alpha \cap \beta \Rightarrow m \parallel a, m \parallel b$

הוכחה בשלילה



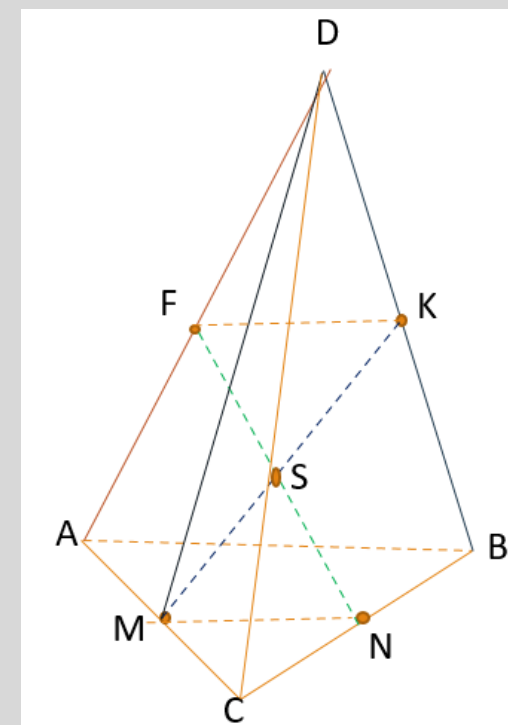
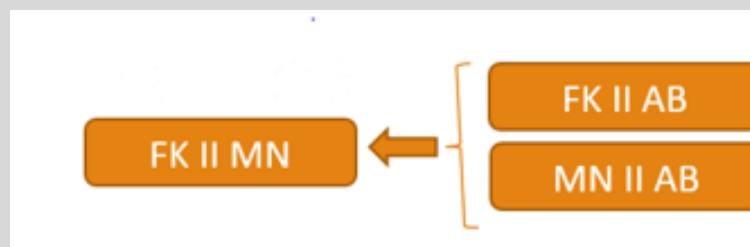
$\left. \begin{array}{l} \underline{P \in a} \\ a \subset \gamma \end{array} \right\} P \in \gamma$
 $\left. \begin{array}{l} P \in c \\ c \subset \beta \end{array} \right\} P \in \beta$
 $\left. \begin{array}{l} P \in \gamma \\ P \in \beta \end{array} \right\} P \in \gamma \cap \beta = b$
 $\underline{P \in b} \Rightarrow P = a \cap b \quad ? \quad a \parallel b$

5. אם כל אחד משני ישרים מקביל לישר השלישי אז הם מקבילים זה לזה.

נתון: $a \parallel c$, $b \parallel c$

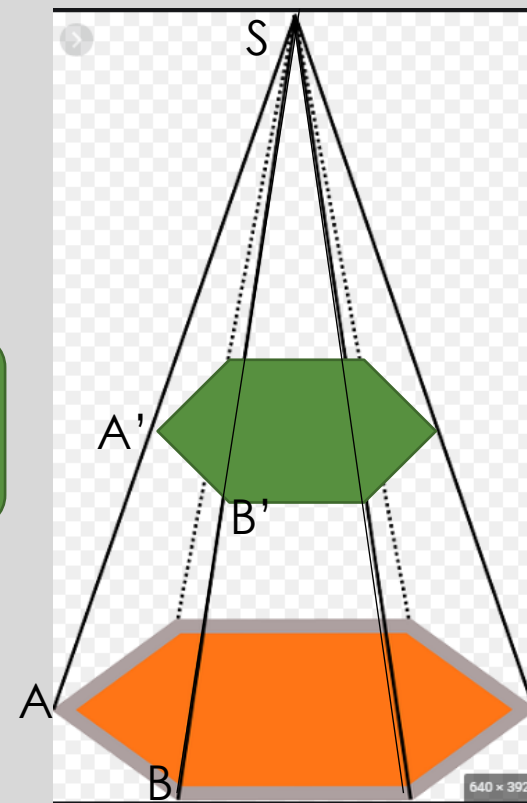
צ.ל. $a \parallel b$

דוגמא לשימוש



6. אם חותכים שני מישורים מקבילים על ידי מישור השלישי אז קווי החיתוך שלהם עם המישור השלישי מקבילים זה לזה.
 נתון: $a = \alpha \cap \gamma$, $b = \beta \cap \gamma$, $\alpha \parallel \beta$
 צ.ל.א $a \parallel b$

דוגמא לשימוש



המישורים מקבילים לכן קווי החיתוך שלהם עם המישור SAB מקבילים זה לזה: $A'B' \parallel AB$

7. אם כל אחד משני מישורים מקביל למישר השלישי אז הם מקבילים זה לזה.

נתון: $\alpha \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma$

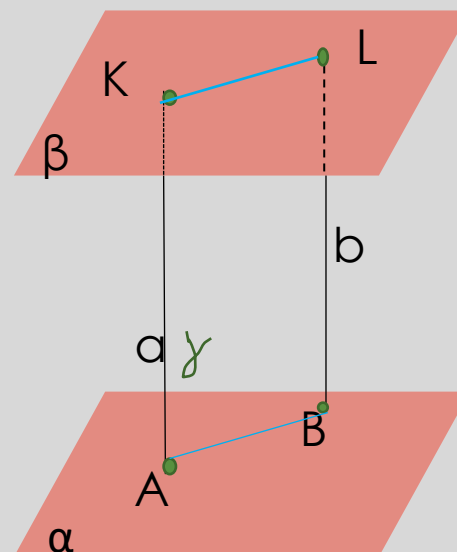
צ.ל. $\alpha \parallel \beta$

8. אם שני ישרים מקבילים חותכים שני ישרים מקבילים אז קטעי הישרים הנמצאים בין המישורים שווים זה לזה.

נתון: $\alpha \parallel \beta, a \parallel b$

$L = b \cap \beta, A = a \cap \alpha, K = a \cap \beta, B = b \cap \alpha$,

צ.ל. $BL = AK$



הוכחה: ישרים מקבילים $a \parallel b$

מגדירים מישור. נקרא לו γ .

$AB = \gamma \cap \alpha, KL = \gamma \cap \beta$

ע"פ הנתון $\alpha \parallel \beta$ לכן ע"פ משפט 6

$KL \parallel AB$. במישור γ מקבילית

(מרובע בעל שתי זוגות צלעות

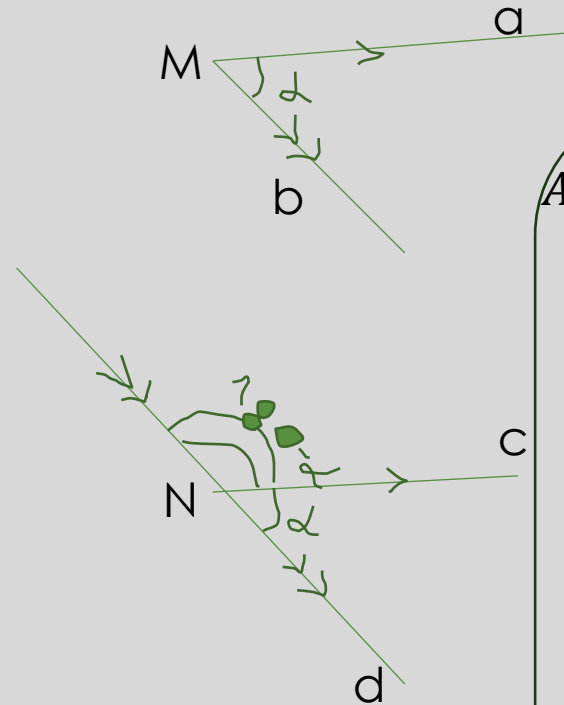
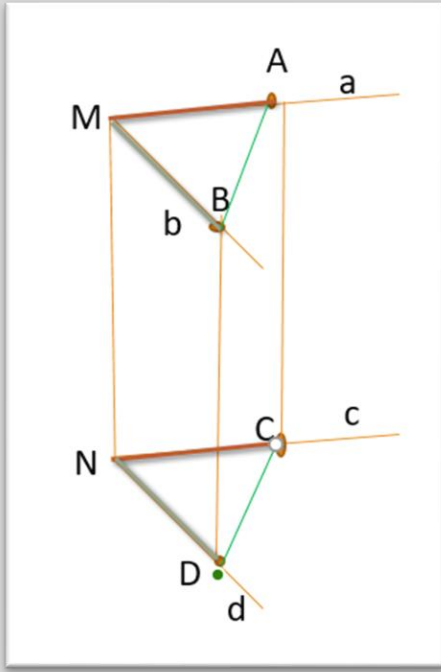
מקבילות). לכן $BL = KA$ (צלעות

נגדיות במקבילית).

9. שתי זוויות במרחב שצלעותיהן מקבילות בהתאמה שוות זו לזו או משלימות ל 180 מעלות.

נתון: $a \parallel c, b \parallel d, N = c \cap d, M = a \cap b$

צ.ל. : זווית M שווה לזווית N



הוכחה: נסמן $A \in a, B \in b, C \in c, D \in d$

כך ש $AM=NC, BM=ND$
 נעביר קטעים AC, MN, BD
 במישור המוגדר ע"י ישרים מקבילים
 a ו c $AMNC$ מקבילית (מרובע
 בעל זוג צלעות מקבילות ושוות
 $NC \parallel AM$. לכן $AC \parallel MN$
 (צלעות נגדיות במקבילית)..
 במישור המוגדר ע"י ישרים מקבילים
 b ו d $MNDB$ מקבילית (מרובע
 בעל זוג צלעות מקבילות ושוות
 $BD \parallel MN$. לכן $MB \parallel ND$
 (צלעות נגדיות במקבילית).
 $BD \parallel AC$ כי שניהם מקבילים
 ושווים ל MN .

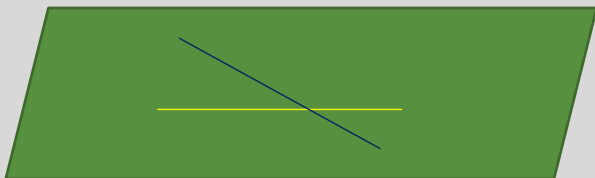
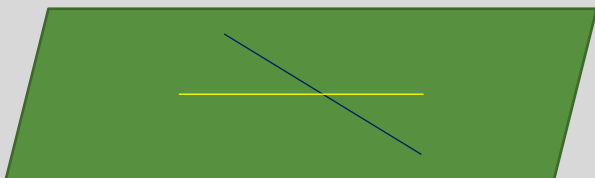
$AC \parallel BD$ מגדירים מישור (כי הם מקבילים). במישור זה $ABDC$ מקבילית
 (מרובע בעל זוג צלעות שוות ומקבילות) לכן $CD=AB$ (צלעות נגדיות במקבילית).

$$\triangle AMB \cong \triangle CND$$

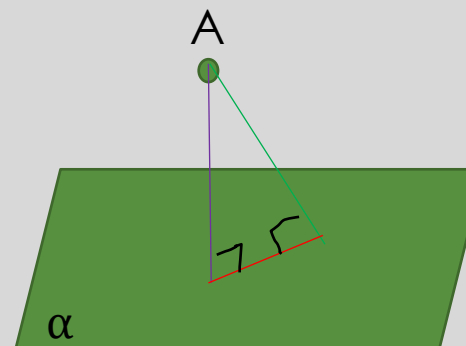
ע"פ שלוש צלעות לכן $\angle AMB = \angle CND$ כי במשולשים חופפים מול
 צלעות שוות ($CD=AB$) נמצאות זוויות שוות.

משפט 12. אם שני מישורים מאונכים לישר אחד אז הם מקבילים זה לזה

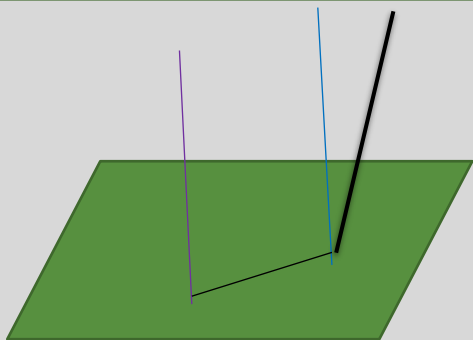
משפט 13. אם שני ישרים נחתכים הנמצאים במישור אחד מקבילים בהתאמה לשני ישרים נחתכים במישור אחר, אז המישורים מקבילים זה לזה



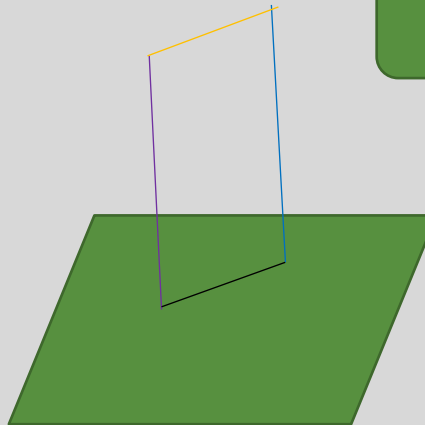
משפט 11. מנקודה מחוץ למישור אפשר להוריד עליו אנך ורק אחד.



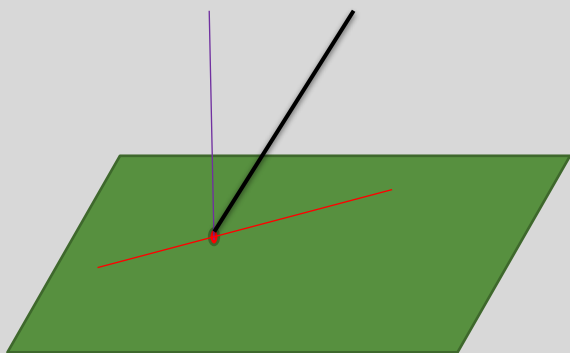
משפט 15. שני ישרים המאונכים לאותו מישור מקבילים זה לזה



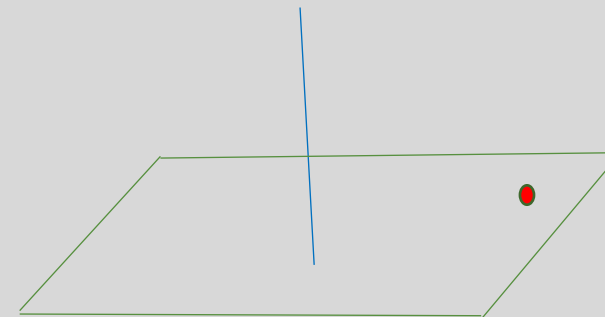
משפט 14. אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך למישור אז גם הישר השני מאונך לו



משפט 17. דרך כל נקודה על המישור אפשר לעלות אנך אחד ויחיד למישור זה.



משפט 16. דרך כול נקודה הנמצאת מחוץ לישר אפשר להעביר מישור ויחיד המאונך לישר זה.





דפי תרגול



דפי תרגול

דף תרגול כוס' 1 - בניית סרטוטים בסיסיים

סרטנו:

1. הישר MP נמצא במישור α ($MP \subset \alpha$).
2. הישר MP חותך את המישור α בנקודה M ($M = MP \cap \alpha$).
3. המישור α מכיל את הישר a . נקודה M של המישור, שאינה שייכת לישר a , היא נקודת החיתוך של הישר b עם המישור α . ($M = b \cap \alpha, M \notin a, M \in \alpha, a \subset \alpha$)
4. הישרים MC ו- MB חותכים את המישור β באותה נקודה ($M = MB \cap \beta, M = MC \cap \beta$).
5. הישרים MC ו- MB חותכים את המישור γ בנקודות שונות ($P \neq N, P = NC \cap \gamma, N = MB \cap \gamma$).
6. למישורים α ו- β יש ישר משותף a , והם חותכים את הישר KM בנקודות K ו- M בהתאמה.
($M = \beta \cap KM, K = \alpha \cap KM, a \subset \beta, a \subset \alpha$)
7. למישורים α, β, γ יש נקודה אחת משותפת בלבד.
8. דרך נקודה A שאינה שייכת למישור α עובר ישר המקביל למישור α ($m \parallel \alpha, A \in m, A \notin \alpha$).

דף תרגול מס' 2 - מצב הדדי בין מישור לבין עצם גיאומטרי נוסף

1 נסחו במילים ושרטטו:

$$a = \alpha \cap \beta \quad 1$$

$$P \in \beta \quad 2$$

$$M \notin \alpha \quad 3$$

בסעיפים הבאים, בנוסף, הוכיחו בעזרת אקסיומות:

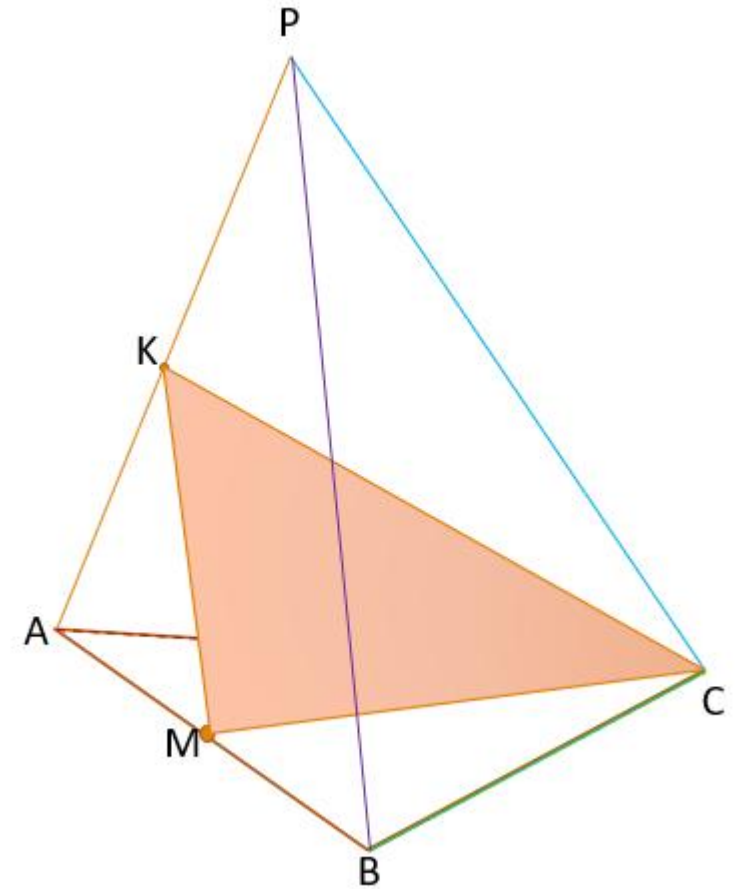
$$PQ \subset \beta \Leftrightarrow (Q \notin \beta, P \in a, \alpha \cap \beta = a) \quad 4$$

$$K \in MN \Leftrightarrow (K = AC \cap \alpha, N = BC \cap \alpha, M = AB \cap \alpha) \quad 5$$

דף תרגול מס' 2.2

II. נתונה פירמידה משולשת $PABC$ (בסיס ABC). נתון: $K \in AP$, $M \in AB$.
סרטטו והשלימו את הטבלה:

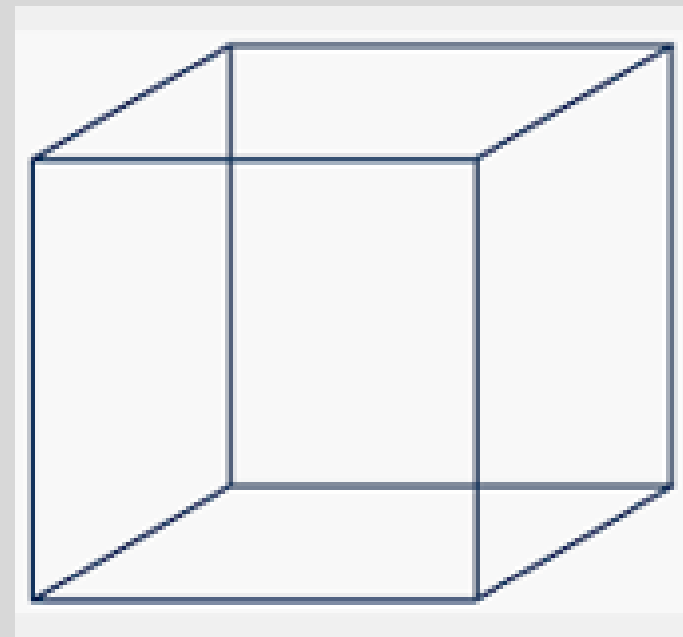
	מישור ראשון	מישור שני	ישר החיתוך
1	ABP	CMK	
2	ABC	CMK	
3	APC	CMK	



דף תרגול מס' 2.3

III נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. סרטטו והשלימו את הטבלה:

מישור ראשון	מישור שני	ישר החיתוך
1. $AA'B'B$	$BB'C'C$	
2. ACD'	$ABCD$	
3. $BB'DD'$	$AA'C'C$	
4. $A'D'CB$	$ABCD$	
5. $DD'C'C$	$ACC'A$	



דף תרגול מס' 3

דף תרגול מס' 3 – מצב ההדדי בין ישר למישור בגופים גיאומטריים

בתרגול זה ננסה לגלות, בינתיים בלי הוכחות מדויקות, מהו המצב ההדדי בין הישרים והמישורים בפירמידה הנתונה.

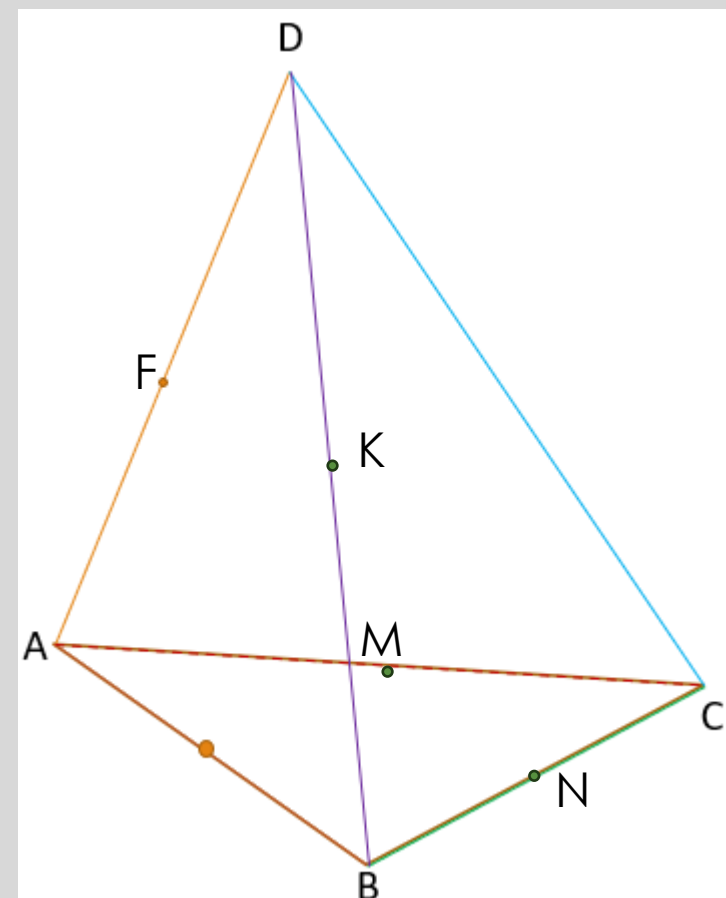
נסו בהתחלה למלא את הטבלה בעצמכם ורק לאחר מכן בדקו את ההסברים.

נתונה פירמידה משולשת ABCD שבסיסה ABC.

הנקודות F, K, N, M הן אמצעי המקצועות AC, AD, BD, BC, בהתאמה.

סרטטו והשלימו את הטבלה:

	הישר	המישור	המצב ההדדי	נקודת חיתוך (אם יש)
1.	DB	AMN		
2.	MN	ABC		
3.	KC	DMN		
4.	MN	ABD		
5.	KF	DMN		
6.	FN	KMF		
7.	CF	ADN		
8.	FN	DMK		





פתרונות והסברים

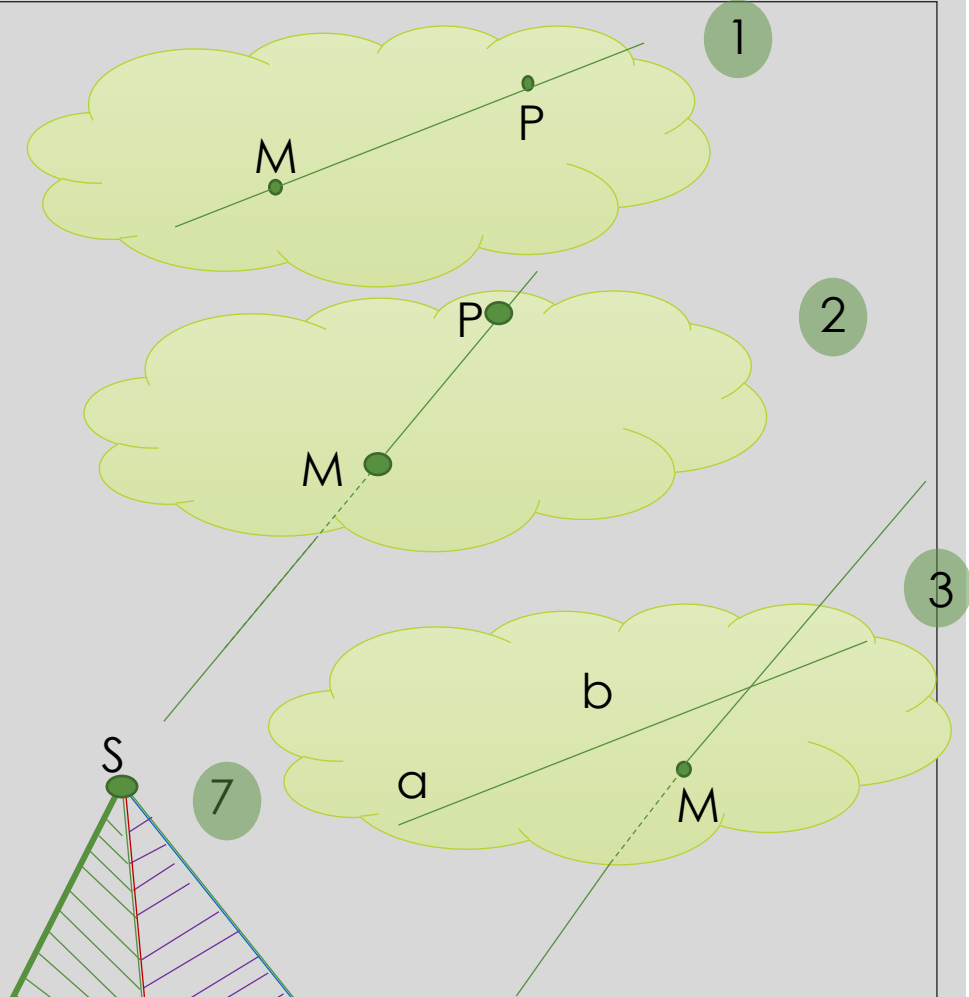
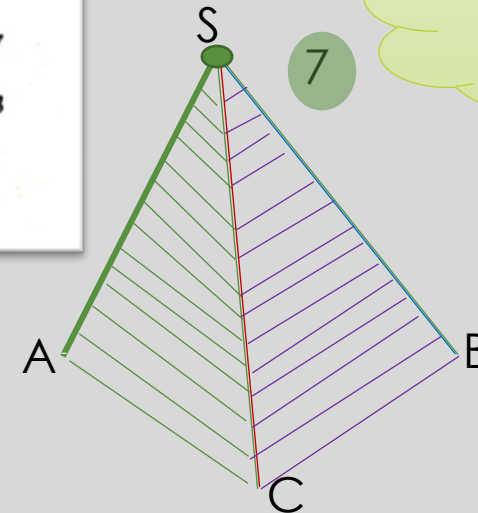


דפי תרגול

דף תרגול כוס' 1 - בניית סרטוטים בסיסיים

סרטו:

1. הישר MP נמצא במישור α ($MP \subset \alpha$).
2. הישר MP חותך את המישור α בנקודה M ($M = MP \cap \alpha$).
3. המישור α מכיל את הישר a . נקודה M של המישור, שאינה שייכת לישר a , היא נקודת החיתוך של הישר b עם המישור α . ($M = b \cap \alpha, M \notin a, M \in \alpha, a \subset \alpha$)
4. הישרים MC ו- MB חותכים את המישור β באותה נקודה ($M = MB \cap \beta, M = MC \cap \beta$).
5. הישרים MC ו- MB חותכים את המישור γ בנקודות שונות ($P \neq N, P = NC \cap \gamma, N = MB \cap \gamma$).
6. למישורים α ו- β יש ישר משותף a , והם חותכים את הישר KM בנקודות K ו- M בהתאמה. ($M = \beta \cap KM, K = \alpha \cap KM, a \subset \beta, a \subset \alpha$)
7. למישורים α, β, γ יש נקודה אחת משותפת בלבד.
8. דרך נקודה A שאינה שייכת למישור α עובר ישר המקביל למישור α ($m \parallel \alpha, A \in m, A \notin \alpha$).



דף תרגול מס' 2 - מצב הדדי בין מישור לבין עצם גיאומטרי נוסף

1 נסחו במילים ושרטטו

$$\alpha = \alpha \cap \beta \quad 1$$

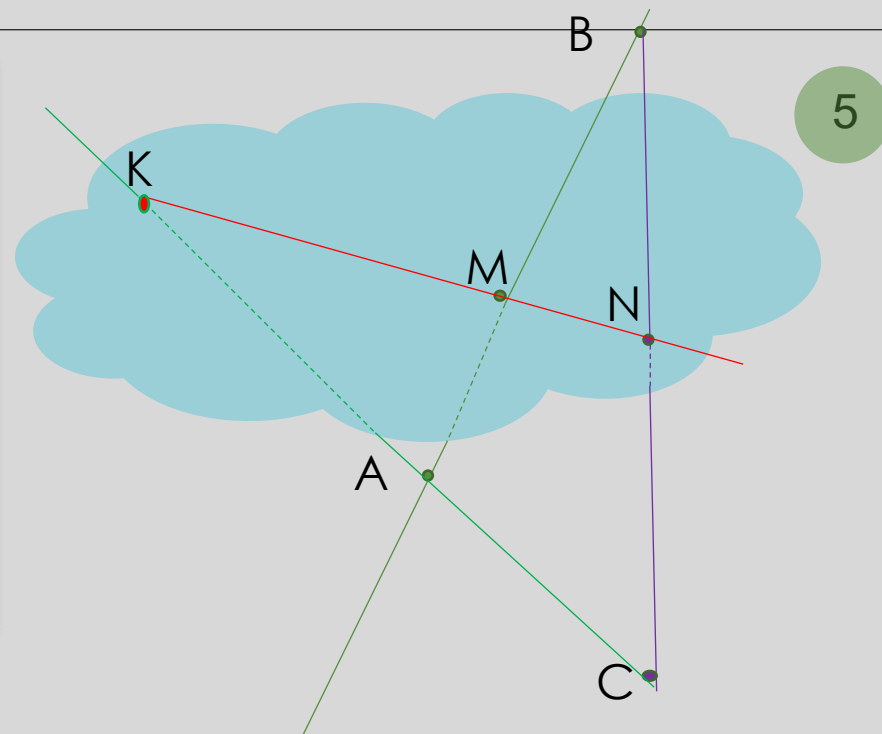
$$P \in \beta \quad 2$$

Mea 3

בסעיפים הבאים, בנוסף, הוכיחו בעזרת אקסיומות

$$PQ \subseteq \beta \Leftarrow (Q \subseteq \beta, P \in \alpha, \alpha \cap \beta = a) \quad 4$$

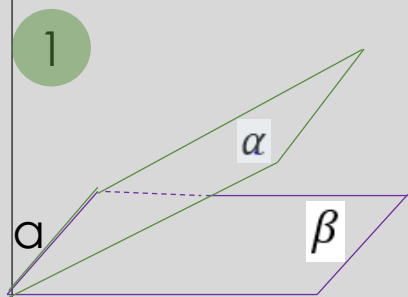
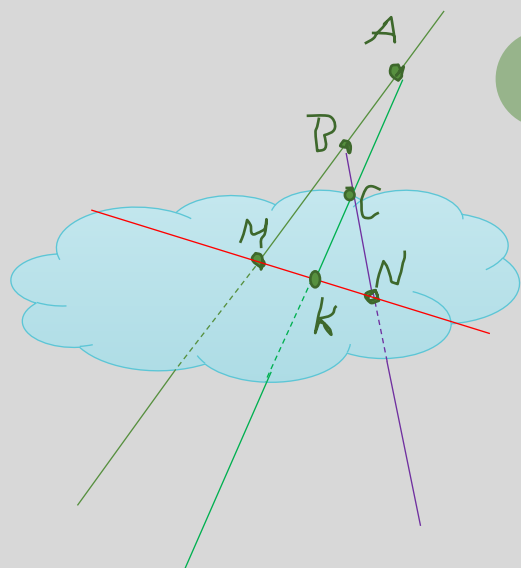
$$K \in MN \Leftrightarrow (K = AC \cap \alpha, N = BC \cap \alpha, M = AB \cap \alpha) \quad 5$$



אקסיומה: מישור מחלק את כל הנקודות של המרחב לשלושה סוגים:

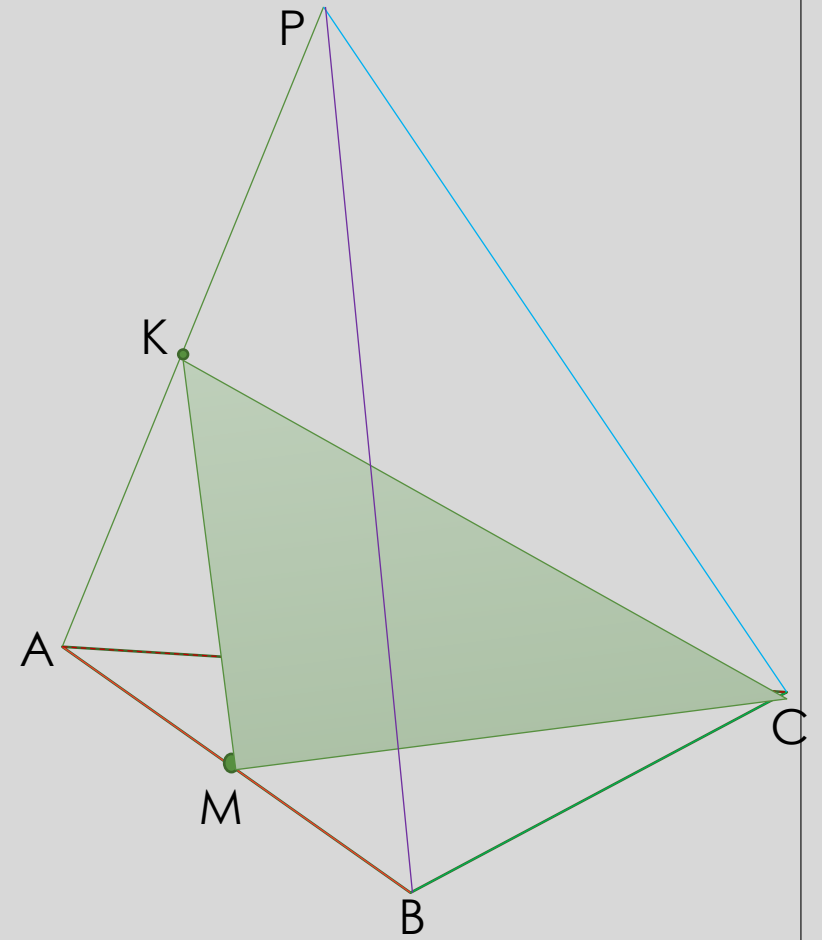
- נקודות שמוכלות במישור
- נקודות שנמצאות מצד אחד של המישור
- נקודות שנמצאות מצד השני של המישור

הישר שמחבר בין שתי נקודות במרחב שנמצאות
בצדדים שונים של המישור חותך את המישור



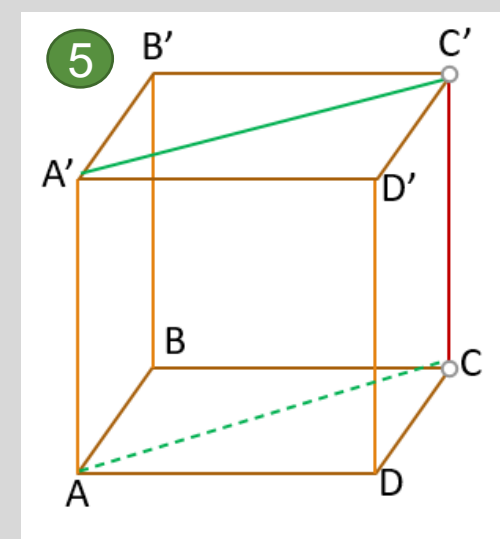
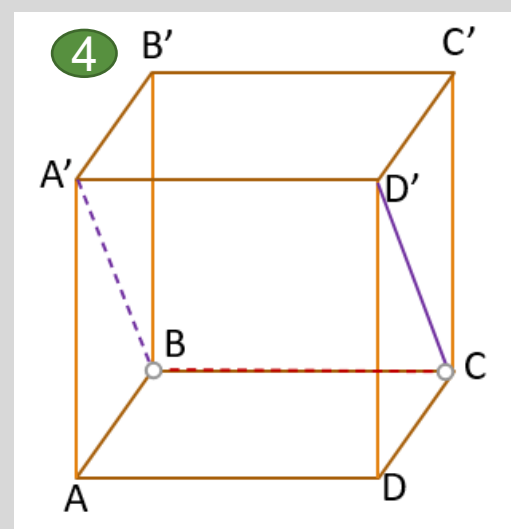
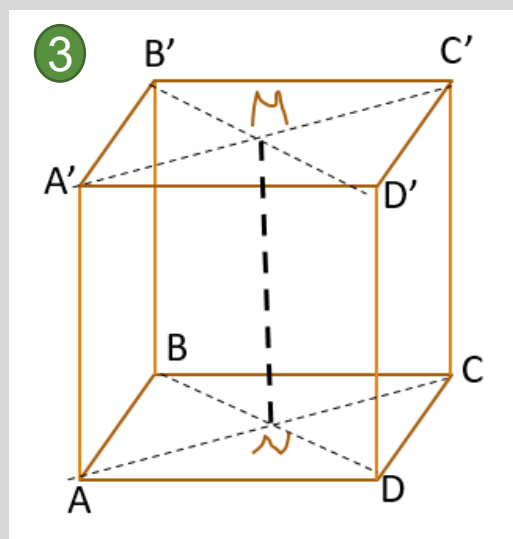
II. נתונה פירמידה משולשת $PABC$ (בסיס: ABC). נתון: $K \in AP$, $M \in AB$.
 סרטטו והשלימו את הטבלה:

מישור ראשון	מישור שני	ישר החיתוך
1. ABP	CMK	MK
2. ABC	CMK	MC
3. APC	CMK	CK



III. נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. סרטטו והשלימו את הטבלה:

מישור ראשון	מישור שני	ישר החיתוך
1. $AA'B'B$	$BB'C'C$	BB'
2. ACD'	$ABCD$	AC
3. $BB'DD'$	$AA'C'C$	MN
4. $A'D'CB$	$ABCD$	BC
5. $DD'C'C$	$ACC'A$	CC'



דף תרגול מס' 3 - מצב ההדדי בין ישר למישור בגופים גיאומטריים

בתרגול זה ננסה לגלות, בינתיים בלי הוכחות מדויקות, מהו המצב ההדדי בין הישרים והמישורים בפירמידה הנתונה.

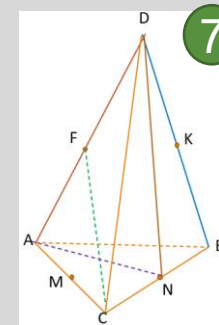
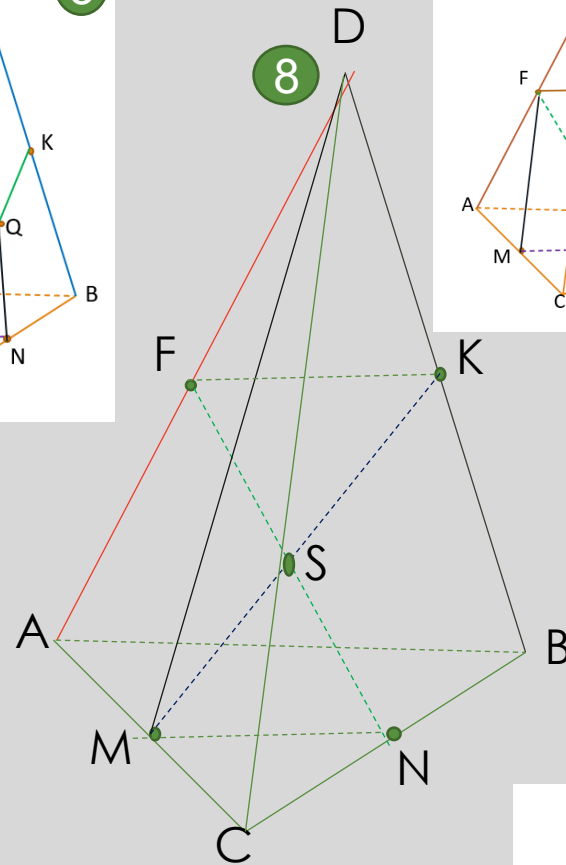
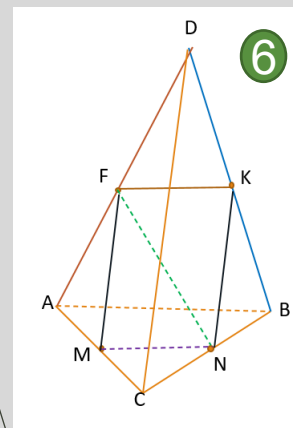
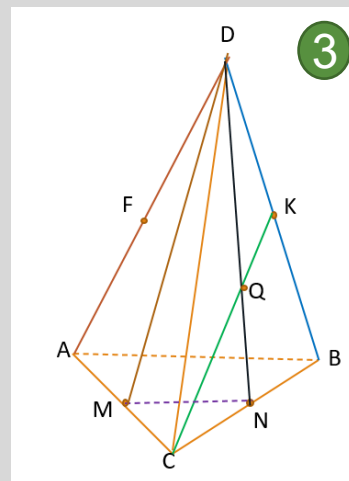
נסו בהתחלה למלא את הטבלה בעצמכם ורק לאחר מכן בדקו את ההסברים.

נתונה פירמידה משולשת ABCD שבסיסה ABC.

הנקודות F, K, N, M הן אמצעי המקצועות AD, BD, BC, AC, בהתאמה.

סרטטו והשלימו את הטבלה:

הישר	המישור	המצב ההדדי	נקודת חיתוך (אם יש)
1. DB	AMN	נחתכים	B
2. MN	ABC	מוכל	ישר MN
3. KC	DMN	נחתכים	Q
4. MN	ABD	מקבילים	אין
5. KF	DMN	מקבילים	אין
6. FN	KMF	מוכל	
7. CF	ADN	נחתכים	F
8. FN	DMK	נחתכים	S



$$FK \parallel MN$$

$$FK \parallel AB$$

$$MN \parallel AB$$

נקודות N, M, K, F באתו מישור

$$FN \cap MK = S$$

$$FN \cap DMK = S$$

המצב ההדדי בין המישור DMK לבין הישר FN

5. $MN \parallel FK$ משפט: אם שני ישרים במרחב מקבילים לישר השלישי אז הם מקבילים זה לזה

6. $MN \parallel FK$ שני ישרים מקבילים לכן הם מגדירים מישור

7. $MK \perp FN$ שני ישרים ששייכים למישור זה. הם נפגשים בנקודה S

$S \in MK, MK \subset (DMK)$

$S \in (DMK)$

$S \in FN$

$S = FN \cap (DMK)$

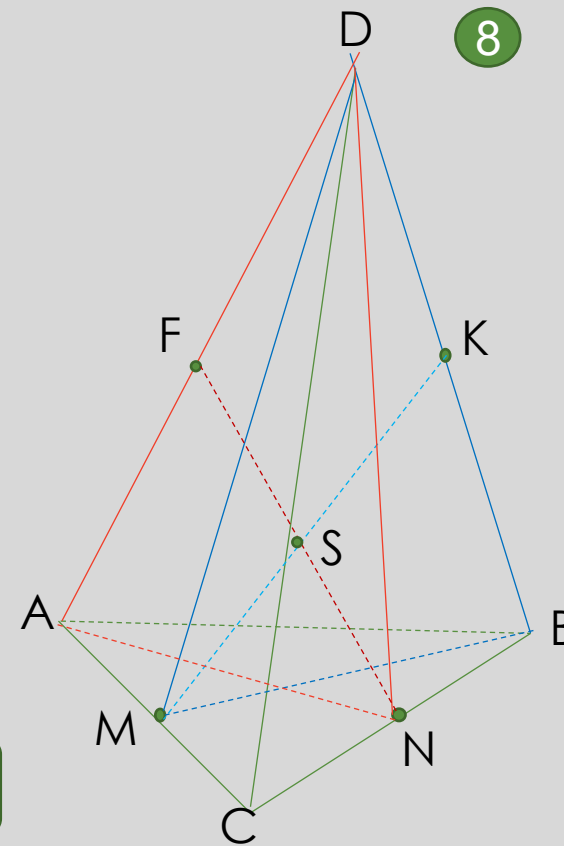
1. * שלוש נקודות מגדירות מישור אחד ויחיד
* אם שתי נקודות של הישר נמצאות על המישור אז ישר כולו נמצא על המישור
לכן $(DMB) = (DMK)$

2. * נקודות N ו- F נמצאות משני הצדדים של המישור (DMB) לכן הישר FN חותך את המישור

נמצא נקודת החיתוך

3. $AB \parallel MN$ קטע אמצעים במשולש ABC

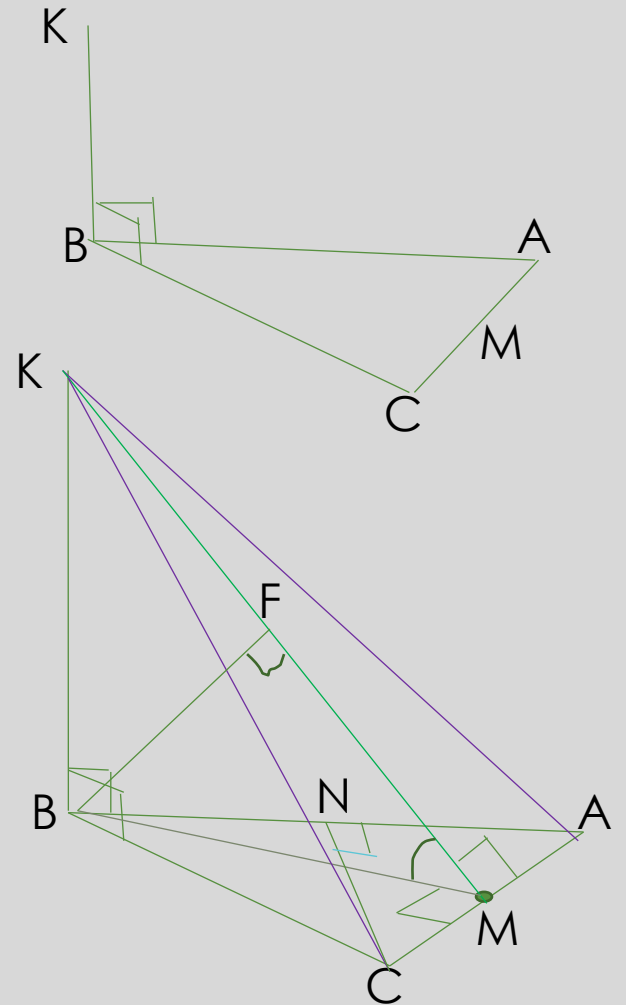
4. $AB \parallel FK$ קטע אמצעים במשולש ABD



דף תרגול 4 – זווית בין ישר למישור
 הישר BK מאונך למישור של המשולש שווה צלעות ABC.
 נתון: $BK=AB$. הנקודה M היא אמצע AC
 השלימו את הטבלה:

	הישר	המישור	שם הזווית	גודל הזווית
1	KA	ABC		
2	KM	ABC		
3	CA	MBK		
4	BA	BMK		
5	AC	KBA		
6	BM	KBA		
7	AK	BKM		
8	BK	ACK		
9	MB	ACK		
10	AK	BCK		

9



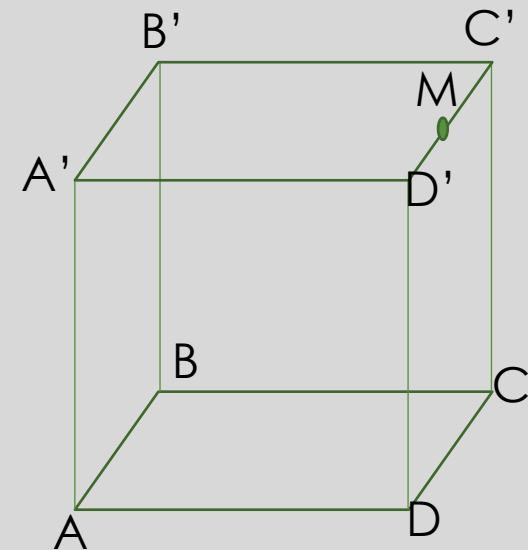
משולשים KBC ו KBA חופפים על פי שתי צלעות וזווית ביניהן. לכן $KC=KA$. M אמצע AC על פי הנתון. לכן KM תיכון במשולש שווה שוקיים AKC לכן הוא גם גובה ו AC מאונך ל KM. משולש ABC שווה צלעות על פי הנתון, BM תיכון לכן הוא גם גובה. לכן AC מאונך ל BM. AC מאונך לשני ישרים במישור KBM לכן הוא מאונך למישור.

ש.ב.

דף תרגול מס' 5 - המצב ההדדי בין שני מישורים

נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. הנקודה M היא אמצע המקצוע $C'D'$. השלימו את הטבלה.

	מישור א'	מישור ב'	המצב ההדדי	הזווית ביניהם
1.	$D'CD$	$A'BA$		
2.	$DD'C$	$A'B'C'$		
3.	$B'D'C$	$A'BD$		
4.	ADC	$B'AC$		
5.	$C'DB$	$A'BD$		
6.	$CC'A$	$A'BD$		
7.	ADC	$AB'C'$		
8.	$B'C'C$	$A'MA$		
9.	$BB'D$	$A'MA$		
10.	$CA'D$	$MA'D$		



דף תרגול מס' 6 – ישרים ומישורים מאונכים

- הישר AK מאונך למישור הריבוע ABCD. הוכיחו:
 - המשופע KD מאונך לצלע CD.
 - הצלע BC מאונכת למשופע BK.
 - המשופע KC מאונך לאלכסון BD.
- מנקודה כלשהי M הורידו אנך MB למישור המלבן ABCD. הוכיחו:
 - המשולש AMD הוא ישר זווית.
 - המשולש CMD הוא ישר זווית.
 - האם הקטע MD מאונך לצלע AC? נמקו.
- נתונים שני משולשים ישרי זווית: $\triangle ACB$ ו- $\triangle ACM$ ($\angle ACB = \angle ACM = 90^\circ$). הישרים AC ו- BM מצטלבים. הוכיחו:
 - CM הוא ההיטל של המשופע BC על המישור AMC.
 - BC הוא ההיטל של המשופע MC על המישור ABC.
- הישר BM מאונך למישור AMC. הישר BC מאונך לקטע AC. הוכיחו: משולש AMC הוא משולש ישר זווית.
- הישר OB מאונך למישור המעגל שמרכזו O. הישר a משיק למעגל זה בנקודה K. הוכיחו: BK מאונך לישר a.

- לשני משולשים שווי שוקיים, משולש PMK ($PM = PK$) ומשולש PHT ($PH = PT$), יש תיכון משותף PO. הוכיחו: PO מאונך למישור MHK.
- למישור המשושה המשוכלל ABCDEF הורידו אנך CM. הוכיחו:
 - $AM \perp AF$
 - $ME \perp EF$
- למישור של משולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) הורידו אנך BP. הנקודות E ו- K נמצאות על המשופעים AP ו- PC, כך שהקטע EK מקביל לצלע AC. הוכיחו: המשולש BKE הוא ישר זווית.
- דרך הנקודה M, הנמצאת על הגובה AH של משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$), העלו אנך למישור המשולש, MP. תהא L נקודה כלשהי על הישר AP. הוכיחו: $BC \perp LH$.

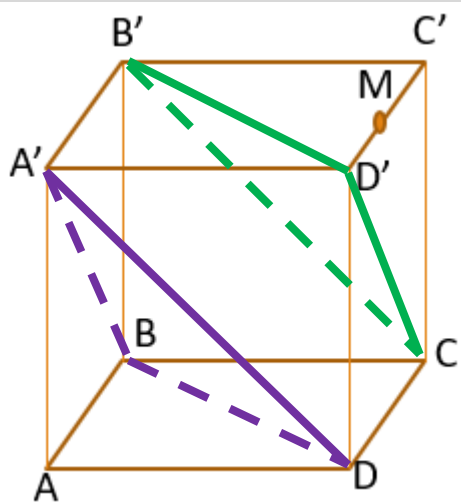
- בקובייה $ABCD A'B'C'D'$, הנקודות E, F, M הן אמצעי המקצועות BB' , $B'C'$, $A'B'$ בהתאמה. הוכיחו: הישר $B'D'$ מאונך למישור EFM.
- על הגובה AE של משולש ABC נתונה נקודה כלשהי M. מנקודה זו מעלים אנך MN למישור המשולש. תהא P נקודה כלשהי על הישר MN. הוכיחו: $AP \perp BC$.



פתרונות והסברים



3

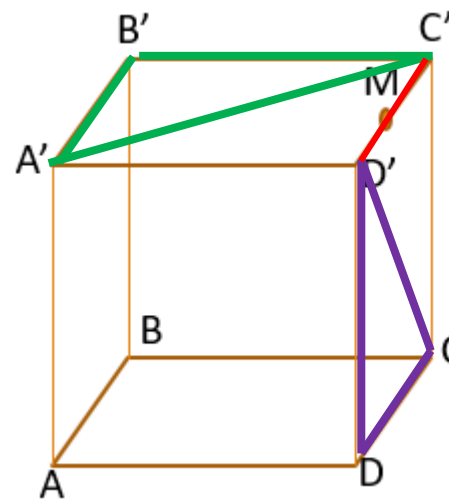


$BD \parallel B'D'$,
 $A'D \parallel B'C$
 לכן המישורים
 מקבילים על פי
 המשפט: אם שני
 ישרים נחתכים של
 מישור אחד מקבילים
 לשני ישרים נחתכים
 של מישור אחר אז
 המישורים מקבילים

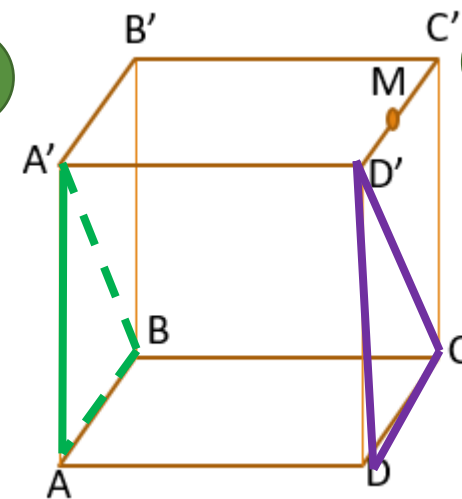
דף תרגול מס' 5 - המצב ההדדי בין שני מישורים

נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. הנקודה M היא אמצע המקצוע $C'D'$.
השלימו את הטבלה:

מישור א'	מישור ב'	המצב ההדדי	הזווית ביניהם
1. $D'CD$	$A'BA$		
2. $DD'C$	$A'B'C'$		
3. $B'D'C$	$A'BD$		
4. ADC	$B'AC$		
5. $C'DB$	$A'BD$		
6. $CC'A$	$A'BD$		
7. ADC	$AB'C'$		
8. $B'C'C$	$A'MA$		
9. $BB'D$	$A'MA$		
10. $CA'D$	$MA'D$		



2

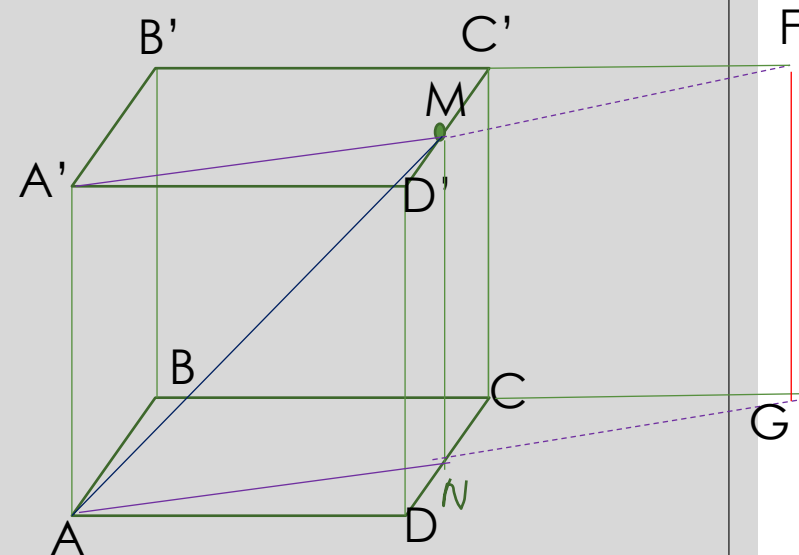


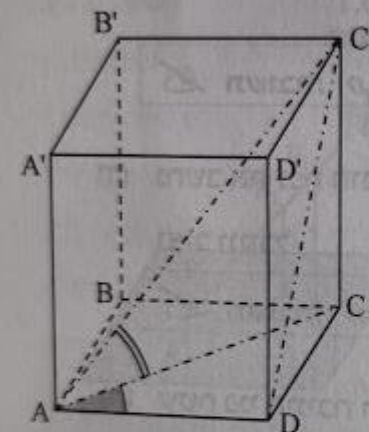
1

דף תרגול מס' 5 - המצב ההדדי בין שני מישורים

נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$. הנקודה M היא אמצע המקצוע $C'D'$. השלימו את הטבלה.

מס'	מישור א'	מישור ב'	המצב ההדדי	הזווית ביניהם
1.	$D'CD$	$A'BA$		
2.	$DD'C$	$A'B'C'$		
3.	$B'D'C$	$A'BD$		
4.	ADC	$B'AC$		
5.	$C'DB$	$A'BD$		
6.	$CC'A$	$A'BD$		
7.	ADC	$AB'C'$		
8.	$B'C'C$	$A'MA$		
9.	$BB'D$	$A'MA$		
10.	$CA'D$	$MA'D$		





בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון כי: $CC' = 14$ ס"מ.

הזווית בין אלכסון התיבה $C'A$ לאלכסון AC של

הבסיס $ABCD$ היא 62° ($\angle C'AC = 62^\circ$).

הזווית בין האלכסון AC למקצוע

AD היא 35° ($\angle CAD = 35^\circ$).

(א) חשב את אורך האלכסון AC .

(ב) חשב את אורך המקצוע CD .

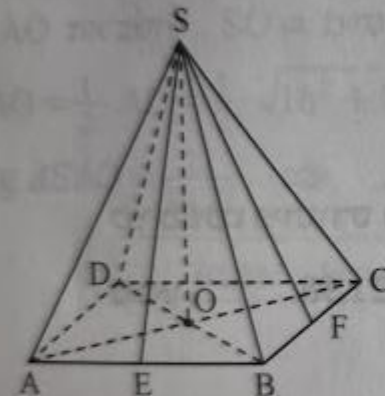
(ג) חשב את אורך המקצוע AD .

(ד) חשב את נפח התיבה.

(ה) חשב את שטח הפנים של התיבה.

(ו) חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה $C'A$

לאלכסון $C'D$ של הפאה $CDD'C'$.



בפירמידה $SABCD$ אורך גובה הפירמידה הוא

21 ס"מ. בסיס הפירמידה הוא מלבן שאורכי

צלעותיו: $AB = 16$ ס"מ, $BC = 13$ ס"מ.

SE הוא גובה בפאה SBC ו- SE הוא גובה

בפאה SAB .

(א) חשב את SE ואת SF .

(ב) חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

(ג) חשב את נפח הפירמידה.

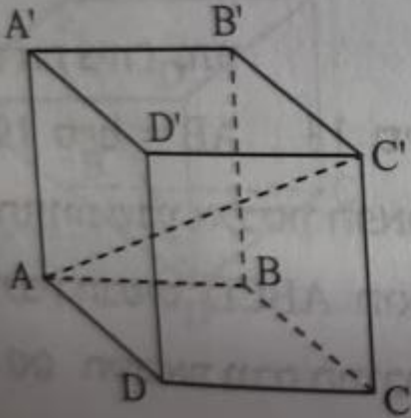
(ד) חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה.

נתונה קוביה $ABCD A'B'C'D'$,
 שאורך המקצוע שלה הוא 10 ס"מ.

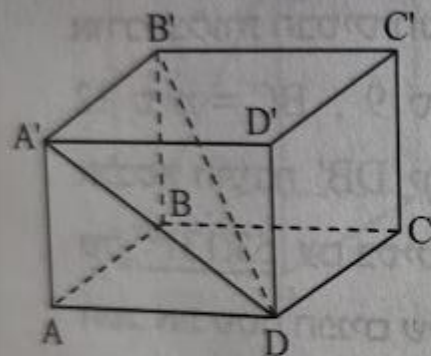
(א) מצא את אורך האלכסון AC' .

(ב) חשב את הזווית בין אלכסון הקוביה AC' לבין מישור הבסיס $ABCD$.

(ג) חשב את הזווית בין האלכסון AC' למקצוע $B'C'$.



בתיבה $ABCD A'B'C'D'$
 (ראה ציור) נתון:
 $AB = 19$ ס"מ , $AD = 13$ ס"מ .
 הזווית שבין אלכסון הפאה, AB' ,
 לבין הבסיס $ABCD$ היא 55° .
 (א) חשב את גובה התיבה, BB' .
 (ב) חשב את AD' , אלכסון הפאה $ADD'A'$.
 (ג) חשב את הזווית שבין AD'
 לבין הבסיס $ABCD$.



נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבה

$AB = 16$ ס"מ , $AD = 18$ ס"מ ,

$AA' = 10$ ס"מ (ראה ציור).

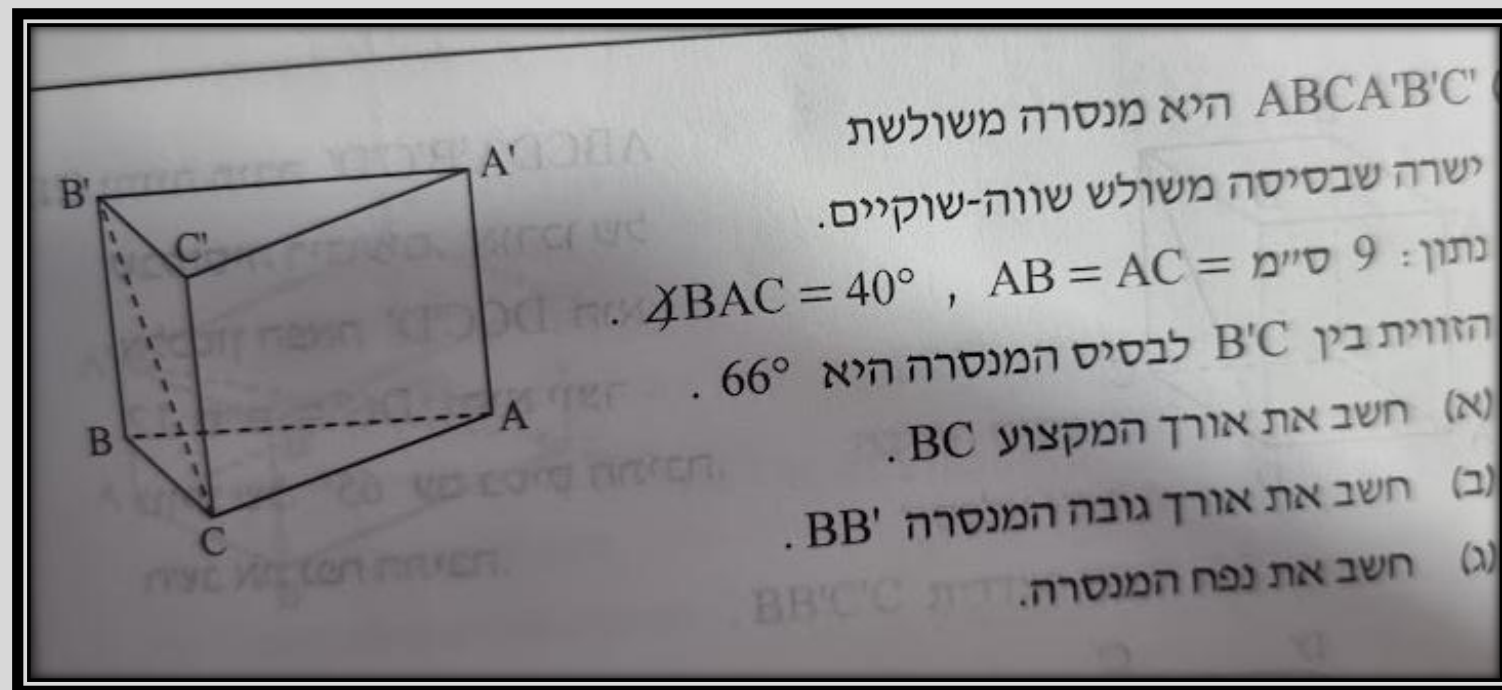
(א) חשב את DA' , אורך אלכסון

הפאה $ADD'A'$.

(ב) חשב את אורך אלכסון התיבה, DB' .

(ג) חשב את הזווית שבין אלכסון הפאה

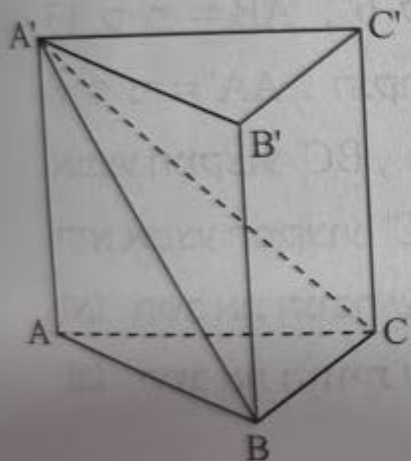
הצדדית, DA' , לבין אלכסון התיבה, DB' .

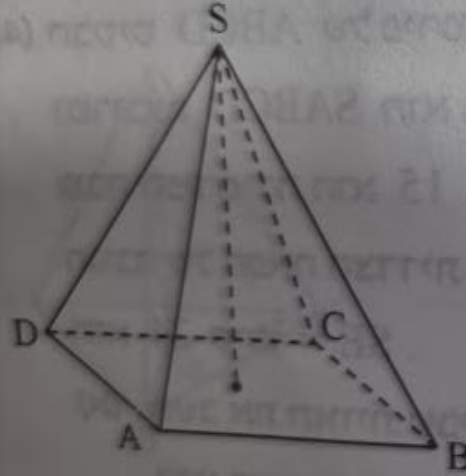


במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$, שבסיסה משולש שווה-שוקיים, נתון:

8 ס"מ $AB = AC$, 6 ס"מ BC , 9 ס"מ AA' (ראה ציור).

(א) חשב את אורך האלכסון $A'B$.
 (ב) חשב את הזווית שבין $A'B$ לבין $A'C$.
 (ג) חשב את שטח המשולש $A'BC$.





הבסיס ABCD של פירמידה ישרה

ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).

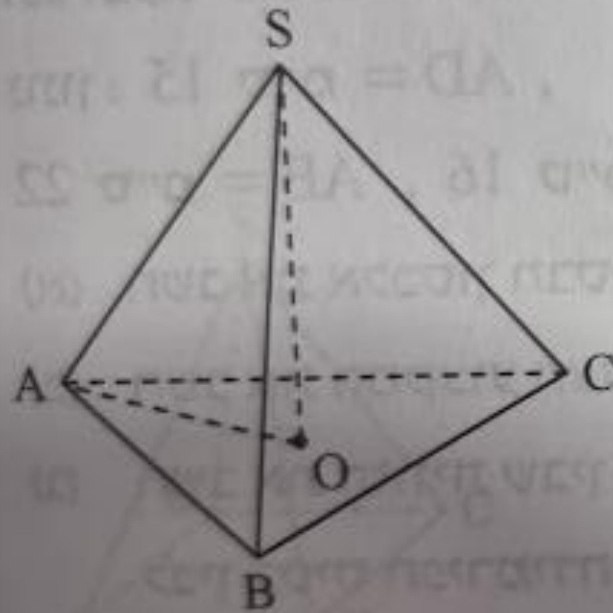
נתון: $AD = 20$ ס"מ , $AB = 45$ ס"מ .

הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא 50° .

(א) חשב את אלכסון הבסיס של הפירמידה.

(ב) חשב את גובה הפירמידה.

(ג) חשב את המקצוע הצדדי של הפירמידה.



SABC היא פירמידה משולשת ישרה
שבסיסה משולש שווה-צלעות.

SO הוא גובה הפירמידה (ראה ציור).

אורך מקצוע הבסיס הוא 7.8 ס"מ.

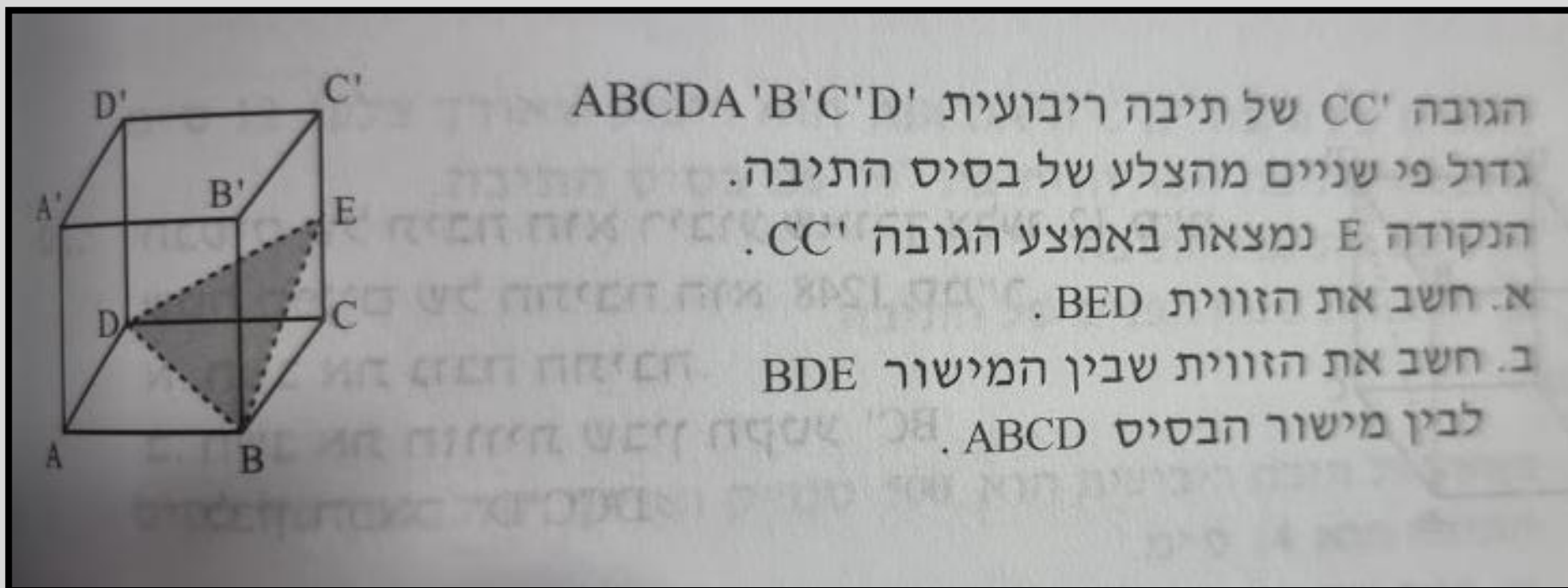
הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס
הפירמידה היא 52° .

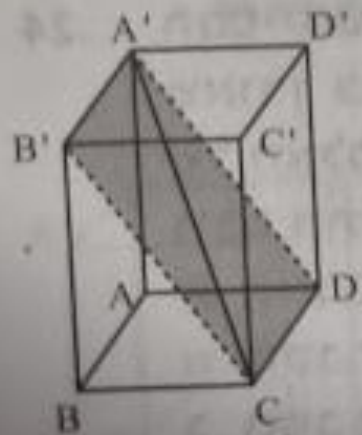
(א) חשב את שטח בסיס הפירמידה.

(ב) חשב את אורך הקטע AO.

(ג) חשב את גובה הפירמידה SO.

(ד) חשב את נפח הפירמידה.





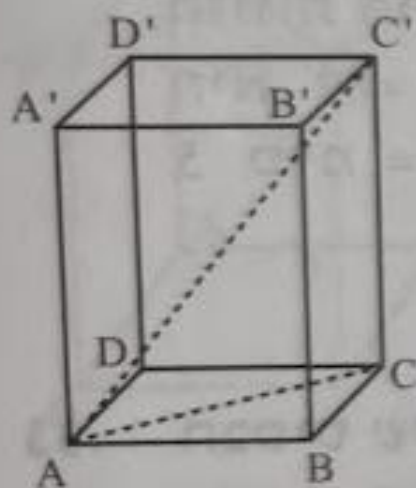
נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע.

אורך צלע הבסיס הוא 10 ס"מ.

הזווית שבין המישור $CDA'B'$ לבסיס $ABCD$ היא 50° .

א. חשב את נפח התיבה.

ב. חשב את הזווית (החדה) שבין אלכסוני התיבה.



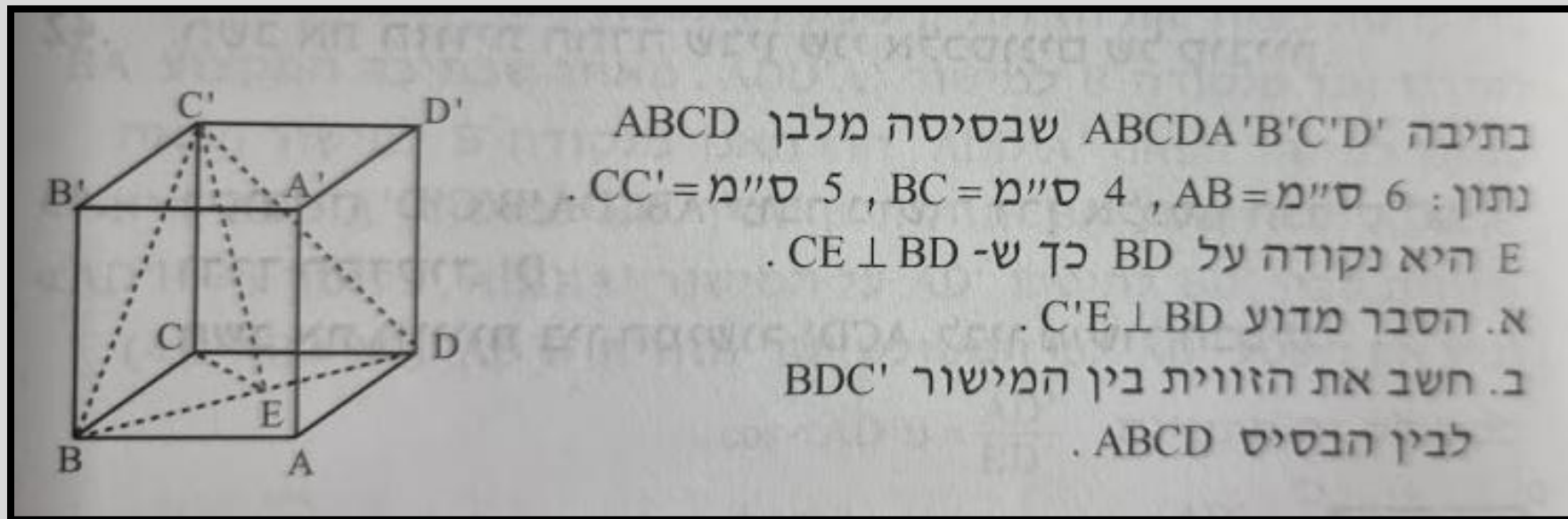
בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: 10 ס"מ $AB =$,

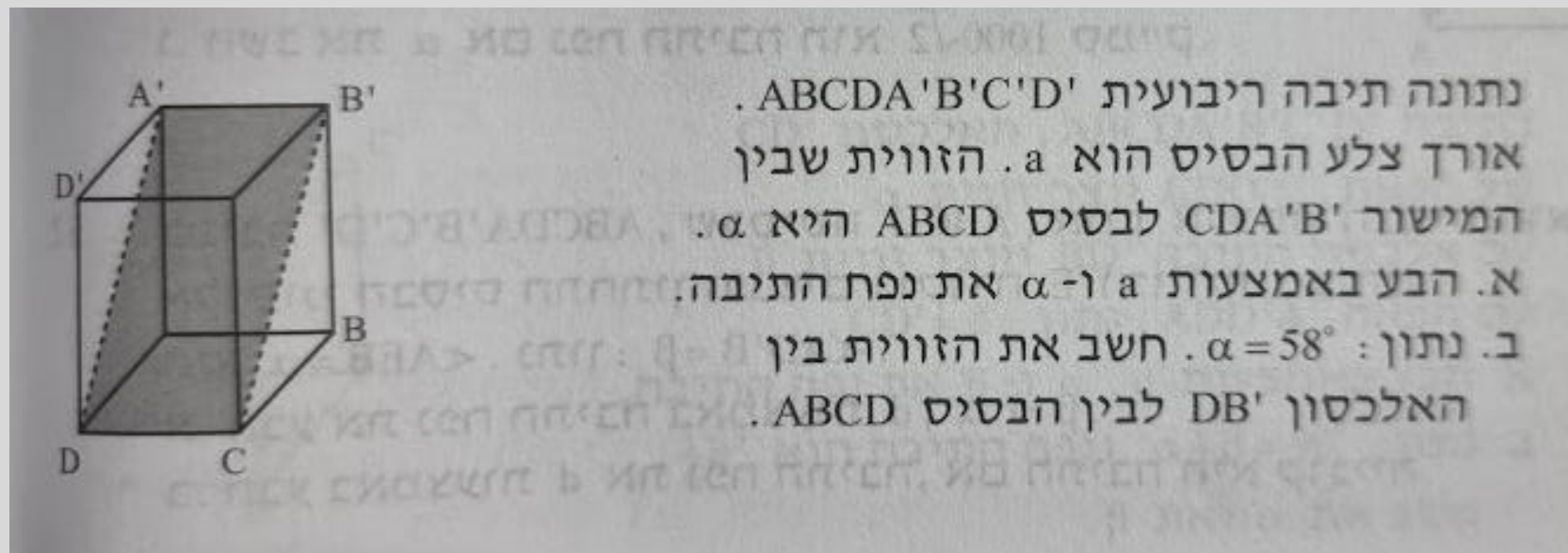
12 ס"מ $AD =$. הזווית שבין האלכסון AC'

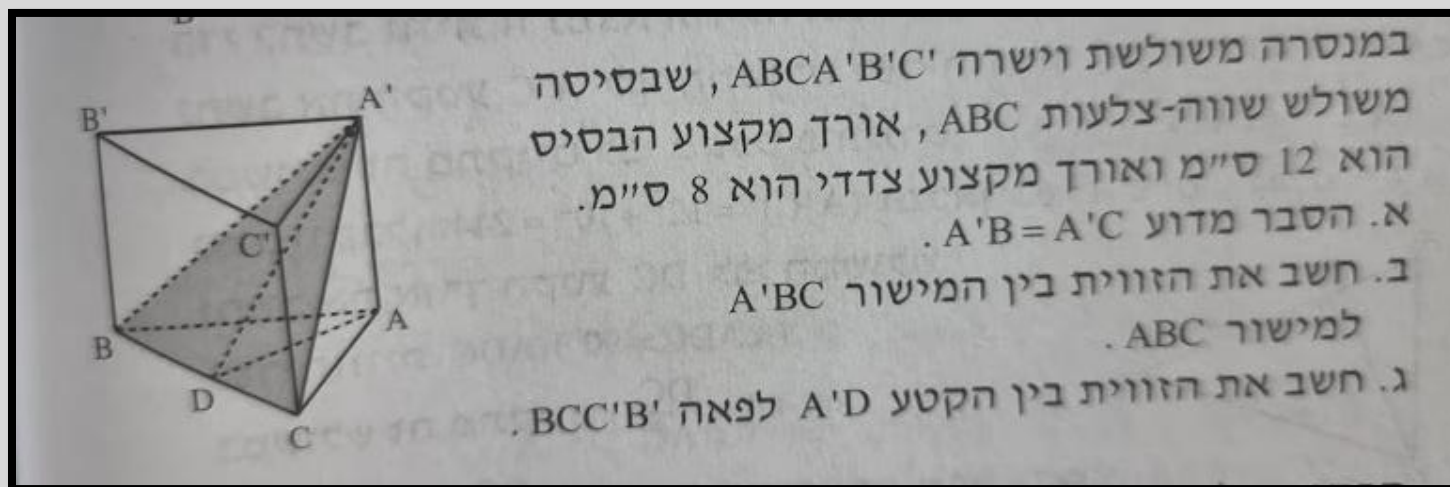
לבסיס $ABCD$ היא בת 38° .

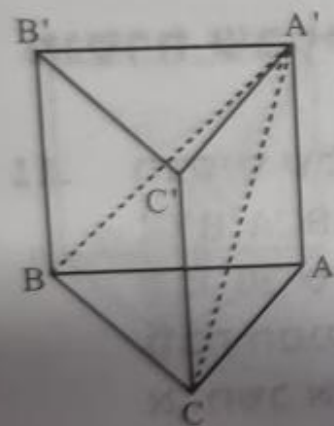
א. חשב את נפח התיבה.

ב. חשב את שטח פני התיבה.

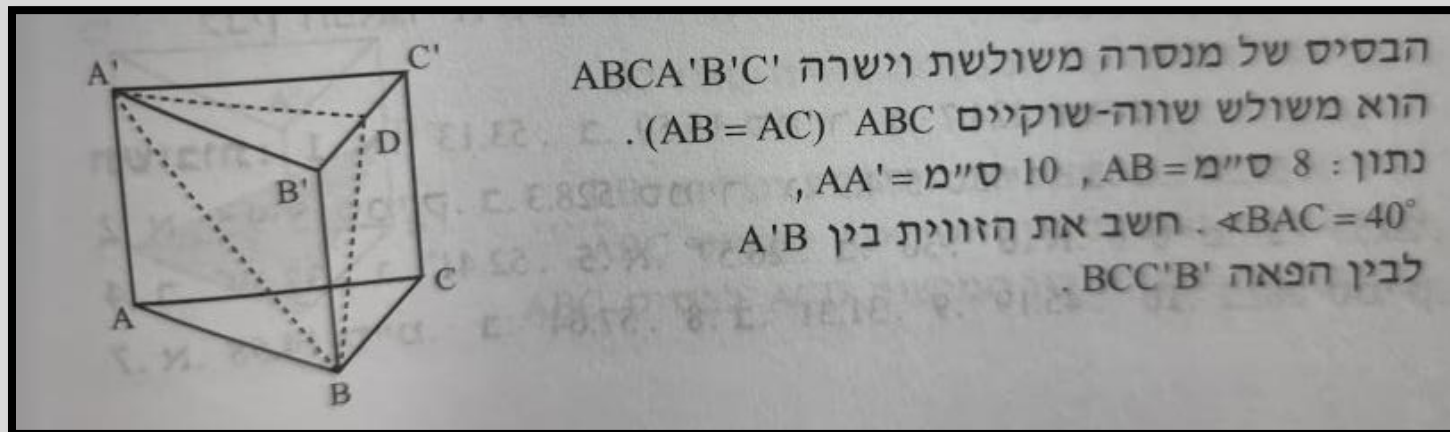






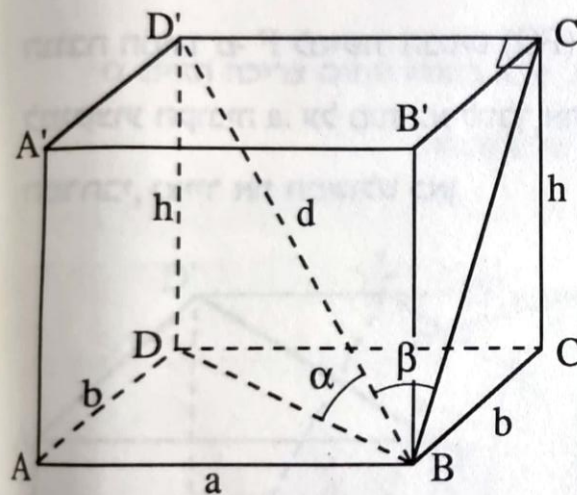


במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$, הבסיס
 הוא משולש שווה-צלעות. הזווית שבין מישור
 המשולש $BA'C$ למישור הבסיס התחתון ABC
 היא 30° . שטח המשולש $BA'C$ הוא 18 סמ"ר.
 א. חשב את האורך של מקצוע הבסיס.
 ב. חשב את הזווית שבין $A'C$ לבסיס
 העליון $A'B'C'$.



11. בתיבה (מינסרה מרובעת ישרה שבסיסה מלבן) $ABCD A'B'C'D'$

(AA' , BB' , CC' , DD' - מיקצועות צדדיים של התיבה) אורך אלכסון התיבה BD' הוא d ,



והוא יוצר עם בסיס התיבה זווית α , ועם הפיאה הצדדית $BCC'B'$ זווית β . הבע את נפח התיבה ואת מעטפתה באמצעות d , α ו- β .

פיתרון: משולש BDD' הוא ישר זווית ובו

$$h = d \sin \alpha$$

$$DB = \sqrt{a^2 + b^2} = d \cdot \cos \alpha$$

הישר $D'C'$ מאונך למישור $B'C'CB$, ולכן לכל ישר במישור עובר דרך עקבו: $DC \perp CC'$

$$a = d \sin \beta$$

במשולש $BC'D'$:

ואינו קודם במשולש BDD': $DB = d \cos \alpha$, נשתמש בזה למציאת אורך הצלע b.

$$(DB)^2 = a^2 + b^2$$

במשולש BCD משפט פיתגורס נותן:

$$b^2 = (DB)^2 - a^2 = d^2 \cos^2 \alpha - d^2 \sin^2 \beta$$

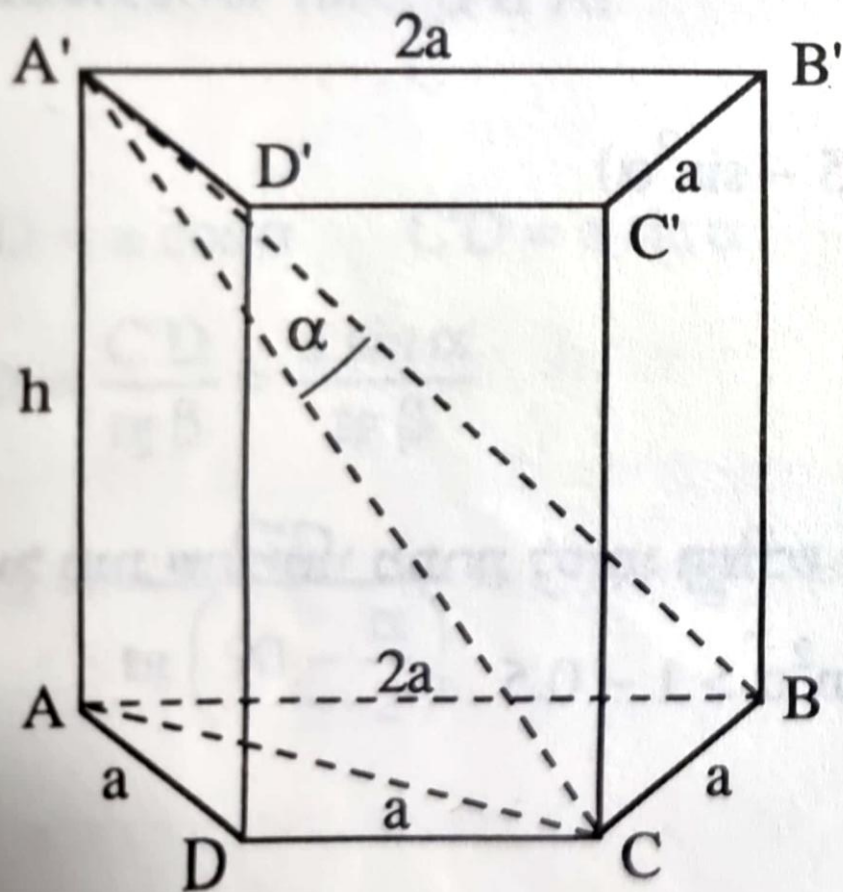
$$b = d \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$$

$$V = abh = d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$$

V - נפח התיבה

$$M = 2(a + b)h = 2d^2 \sin \alpha \left(\sin \beta + \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} \right)$$

M - שטח המעטפת



12. בסיס מינסרה ישרה הוא טרפז שווה שוקיים,

בו השוקיים והבסיס הקטן שווים ואורכם a . אורך

הבסיס הגדול הוא $2a$. הזווית בין שני אלכסוני

המינסרה היוצאים מאחד מקודקודי הבסיס הגדול

של הטרפז היא α . הבע את נפח המינסרה ושטח

פניה באמצעות a ו- α .

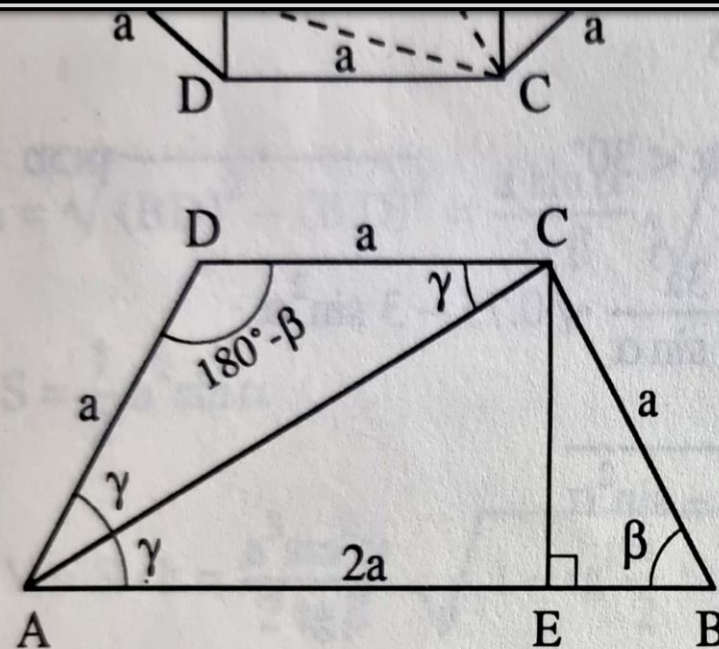
פיתרון:

נחשב את שטח הטרפז, בעזרת הציור הבא של בסיס

פיתרון:

נחשב את שטח הטרפז, בעזרת הציור הבא של בסיס

המעטרה:



$$BE = 0.5 (2a - a) = 0.5a$$

$$CE = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (a + 2a) \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{4}$$

המשולש BCE הוא משולש ישר זווית בו אחד הניצבים שווה לחצי היתר. כלומר, זהו משולש

$$\cos \beta = \frac{0.5a}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

הזהב:

משולש ADC הוא שווה שוקיים, לכן $\gamma = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$. מכאן נובע:

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

$$BC \perp AC$$

כלומר:

AC הוא ההיטל של המשופע A'C במישור ABCD. על פי המשפט, שישר המאונך להיטל

$$BC \perp A'C$$

מאונך גם למשופע עצמו, נקבל:

$$\therefore A'B = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$h^2 + 4a^2 = (A'B)^2$$

במשולש ישר הזווית A'B'B:

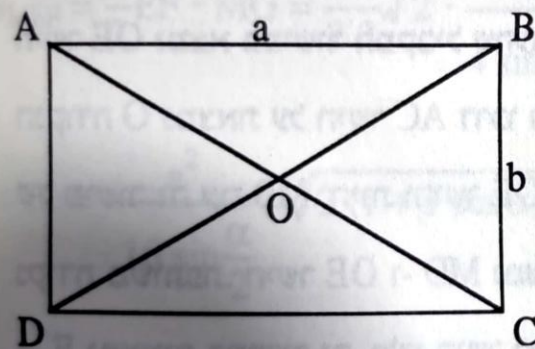
$$h^2 = (A'B)^2 - 4a^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} - 4a^2 = \frac{4a^2}{\sin^2 \alpha} (0.25 - \sin^2 \alpha)$$

$$h = \frac{2a}{\sin \alpha} \sqrt{0.25 - \sin^2 \alpha}$$

$$V = S_{ABCD} \cdot h = \frac{a^3 3\sqrt{3}}{2 \sin \alpha} \sqrt{0.25 - \sin^2 \alpha} = \frac{3a^3}{2 \sin \alpha} \sqrt{0.75 - 3 \sin^2 \alpha}$$

$$P = 2S_{ABCD} + 5ah = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} + \frac{10a^2}{\sin \alpha} \sqrt{0.25 - \sin^2 \alpha}$$

7. בפירמידה מרובעת ישרה שבסיסה מלבן, צלעות המלבן הם a ו- b . אורך המיקצוע הצדדי הוא c . הבע את נפח הפירמידה ואת שטח מעטפתה באמצעות a , b ו- c .



פיתרון: הגובה המורד מקודקוד הפירמידה אל

הבסיס, פוגע במרכז המעגל החוסם - מפגש

האלכסונים.

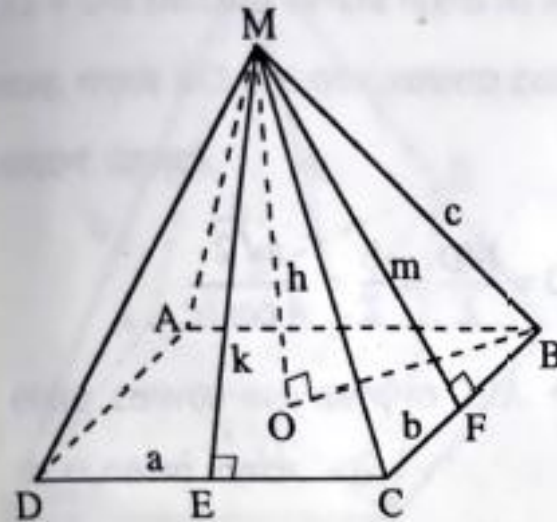
נתבונן בבסיס הפירמידה:

$$DB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$OB = \frac{DB}{2} = 0.5 \sqrt{a^2 + b^2}$$

M

$$h = \sqrt{c^2 - OB^2} = \sqrt{c^2 - 0.25(a^2 + b^2)}$$



$$h = \sqrt{c^2 - OB^2} = \sqrt{c^2 - 0.25(a^2 + b^2)}$$

$$V = \frac{1}{3} abh = \frac{1}{3} ab \sqrt{c^2 - 0.25(a^2 + b^2)}$$

k הוא הגובה של הפיאה MDC. m הוא הגובה של הפיאה MBC.

$$M = a \cdot k + b \cdot m$$

שטח המעטפת:

$$k = \sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}} = 0.5 \sqrt{4c^2 - a^2}$$

משפט פיתגורס במשולש ישר הזווית MEC, נותן:

משולש MFB הוא משולש ישר זווית, ומשפט פיתגורס נותן:

$$m = \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}} = 0.5 \sqrt{4c^2 - b^2}$$

$$M = 0.5 \cdot (a \sqrt{4c^2 - a^2} + b \sqrt{4c^2 - b^2})$$

שטח המעטפת הוא:

